INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2^{a} Chamada do Exame de Álgebra Linear

18 de janeiro de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7.75*v*] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \end{bmatrix} = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 3 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A é invertível.

ii) $(-3, 1, 0) \in \mathcal{N}(A)$.

iii) $\langle u_1, u_2, u_3, b \rangle \neq \mathbb{R}^3$.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 2$**.**

c) Indique os valores β para os quais b é combinação linear de u_1 e u_2 e escreva a combinação linear.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

e) Justifique que $\{(3, -1, 10), (1, 3, 0)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

[4.25*v*] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = (0, 1, 3, 0)$.

a) Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)^{\perp}$.

b) Determine a distância de b a $\mathcal{C}(A)$.

c) Determine um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e a distância de c a $\mathcal{C}(A)$ seja 1.

[4*v*] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais

i) 0 é valor próprio de A.

ii) $(1, 1, 1)$ é vetor próprio de A.

No que se segue considere $\alpha = 1$.

b) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

c) Será que 2 vetores próprios de A não colineares podem estar associados ao mesmo valor próprio?

Continua no verso !

[1v] **4.** Uma empresa agro-alimentar fabrica dois produtos P e Q, a partir de dois ingredientes A e B, mediante dois processos de fabrico alternativos. As quantidades de ingredientes A e B consumidas e as quantidades de produtos P e Q produzidas por hora em cada processo encontram-se na tabela seguinte:

	Ingredientes (kg/h)		Produtos (kg/h)	
	A	B	P	Q
Processo 1	4	4	$0,3$	$0,4$
Processo 2	2	3	$0,6$	$0,3$

As quantidades de ingredientes A e B disponíveis são respetivamente 1000 kg e 1200 kg e os lucros por cada kg de P e Q produzidos são respetivamente 4€ e 5€. Devido à perecibilidade do ingrediente A, devem ser consumidos pelo menos 500 kg desse ingrediente. A empresa pretende determinar o tempo que cada um dos processos deve ser aplicado por forma a maximizar o lucro.

Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

[1.75v] **5.** Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{ll} \min & z = x + y \\ \text{s.a} & \begin{array}{rl} 2x+3y & \geq 6 \\ 3x+2y & \geq 6 \\ 2x+3y & \leq 12 \\ x\,,\,y & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível do problema.

b) Escreva o problema na forma *standard*.

c) Indique o número de soluções básicas admissíveis e dê exemplo de uma delas.

[1.25v] **6.** Seja A uma matriz de tipo $m \times 3$ com $m \geq 3$, tal que $A = [\, u_1 \; u_2 \; u_3 \,]$. Sabendo que $\text{car}(A) = 3$, prove que $\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_3\}$ é linearmente independente.