

JUSTIFIQUE AS RESPOSTAS

1. Considere o triângulo $[ABC]$ com os vértices $A(7, 5)$, $B(2, 3)$ e $C(6, -7)$. [2.5v]

- (a) Mostre analiticamente que o triângulo é rectângulo.
- (b) Calcule a área e o perímetro do triângulo.

2. Considere o vector $u = (1, \alpha, \beta)$, de norma $\sqrt{11}$, e o vector $v = (1, 0, 1)$ tal que a projecção ortogonal de u sobre v é o vector $(2, 0, 2)$. Determine α e β . [1.5v]

3. Considere, em \mathbb{R}^3 , a recta r definida por $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. [4.0v]

- (a) Interprete geometricamente cada uma das duas equações que definem r .
- (b) Indique um vector com a direcção de r .
- (c) Escreva a equação de um plano perpendicular a r e determine a sua intersecção com r .

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[5.5v]

- (a) Calcule $B(A + 2I)^T$, em que I denota a matriz identidade.
- (b) Resolva o sistema $Ax = b$.
- (c) A matriz A é invertível?
- (d) Indique um vector $c \in \mathbb{R}^3$ para o qual o sistema $Ax = c$ é impossível.
- (e) Indique dois vectores unitários com a mesma direcção que a 1ª coluna de A .

5. A matriz $T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ define uma rotação de ângulo θ radianos no sentido anti-horário. Escolha um ângulo $\theta \in]0, 2\pi[$ e indique o vector resultante da transformação do vector (x, y) de \mathbb{R}^2 por T . [1.5v]

6. Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n invertíveis. Mostre o resultado $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. [1.0v]

¹O enunciado não foi escrito ao abrigo do Acordo Ortográfico.

Responda ou à questão 7 ou à questão 8.

7. Uma comida de cantina vegetariana dispõe de feijão azuki e tofu para confeccionar a componente proteica de uma refeição. Cada Kg de feijão custa 3 €, fornece 60 gramas de proteínas e 80 gramas de fibra; 1 Kg de tofu custa 6 €, fornece 90 gramas de proteínas e 40 gramas de fibra. Qual é a maneira mais económica de combinar estes dois ingredientes de forma a que cada dose individual contenha pelo menos 30 gramas de proteínas e não mais do que 20 gramas de fibra?

Formule o problema em programação linear, atribuindo significado às variáveis.

[4.0v]

8. Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 20x + 30y \\ \text{s.a.} \quad & x + 2y \leq 120 \\ & x \leq 60 \\ & y \leq 50 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

[4.0v]

- (a) Represente graficamente a região admissível.
- (b) Represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.
- (c) Determine uma solução óptima e indique o correspondente valor da função objectivo.