INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

18 de janeiro de 2023 - Duração: 2h

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

[7.75v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \alpha & 2\alpha & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \end{bmatrix} = [\, u_1 \; u_2 \; u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 3 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$, o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Se $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ ou $\alpha = 2$ e $\beta = 0$, o sistema é PI.

Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 2$ ou $\alpha = 2$ e $\beta \neq 0$, o sistema é IMP.

b) Indique os valores de α e β para os quais:

i) A é invertível. $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 2$

ii) $(-3, 1, 0) \in \mathcal{N}(A)$. $\alpha = 0$

iii) $\langle u_1, u_2, u_3, b \rangle \neq \mathbb{R}^3$. $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ ou $\alpha = 2$ e $\beta = 0$.

Nas seguintes alíneas considere $\alpha = 2$.

c) Indique os valores β para os quais b é combinação linear de u_1 e u_2 e escreva a combinação linear.
$\beta = 0$ tendo-se $b = (1, 0, 3) = -2 \times (1, 2, 1) + 1 \times (3, 4, 5) = -2u_1 + u_2$.

d) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.
$\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) \,:\, -3b_1 + b_2 + b_3 = 0\}$. Geometricamente representa um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetor normal $(-3, 1, 1)$.

e) Justifique que $\{(3, -1, 10), (1, 3, 0)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

[4.25v] **2.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = (0, 1, 3, 0)$.

a) Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)^\perp$.
Uma possível base de $\mathcal{C}(A)^\perp$ é, por exemplo, $\{(1, -1, -1, 1)\}$ e a $\dim \mathcal{C}(A)^\perp = 1$ (número de vetores da base).

b) Determine a distância de b a $\mathcal{C}(A)$. 2

c) Determine um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(c) = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$ e a distância de c a $\mathcal{C}(A)$ seja 1.
Por exemplo, $c = \text{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b) + \dfrac{1}{2}\text{proj}_{\mathcal{C}(A)^\perp}(b) = \frac{1}{2}(1, 1, 5, 1)$.

[4v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais

i) 0 é valor próprio de A. $\alpha = 1$

ii) $(1, 1, 1)$ é vetor próprio de A. $\alpha = 3$ (associado ao valor próprio 2)

No que se segue considere $\alpha = 1$.

b) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.
0 e 1 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respetivamente.

c) Será que 2 vetores próprios de A não colineares podem estar associados ao mesmo valor próprio?
Não.

[1v] **4.** Uma empresa agro-alimentar fabrica dois produtos P e Q, a partir de dois ingredientes A e B, mediante dois processos de fabrico alternativos. As quantidades de ingredientes A e B consumidas e as quantidades de produtos P e Q produzidas por hora em cada processo encontram-se na tabela seguinte:

	Ingredientes (kg/h)		Produtos (kg/h)	
	A	B	P	Q
Processo 1	4	4	$0,3$	$0,4$
Processo 2	2	3	$0,6$	$0,3$

As quantidades de ingredientes A e B disponíveis são respetivamente 1000 kg e 1200 kg e os lucros por cada kg de P e Q produzidos são respetivamente 4€ e 5€. Devido à perecibilidade do ingrediente A, devem ser consumidos pelo menos 500 kg desse ingrediente. A empresa pretende determinar o tempo que cada um dos processos deve ser aplicado por forma a maximizar o lucro.

Formule o problema em termos de programação linear atribuindo significado às variáveis.

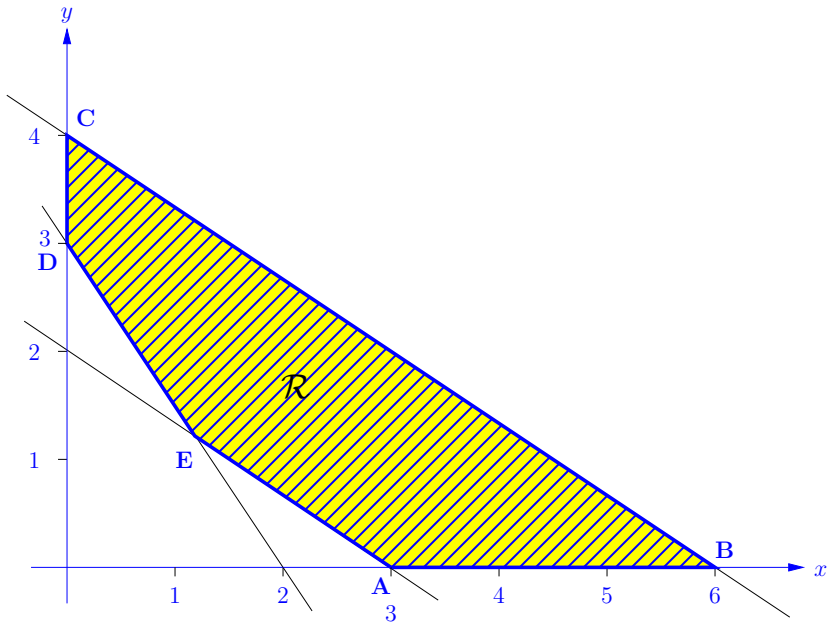
$$\begin{array}{lll} \min & z = 4 \times (0,3\,t_1 + 0,6\,t_2) + 5 \times (0,4\,t_1 + 0,3\,t_2) & \\ \text{s.a} & 4\,t_1 + 2\,t_2 & \leq 1000 \\ & 4\,t_1 + 3\,t_2 & \leq 1200 \\ & 4\,t_1 + 2\,t_2 & \geq 500 \\ & t_1, t_2 & \geq 0 \end{array}$$

em que t_1 e t_2 são, respetivamente, os tempos (em horas) a aplicar os processos 1 e 2.

[1.75v] **5.** Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{lll} \min & z = x + y & \\ \text{s.a} & 2x + 3y & \geq 6 \\ & 3x + 2y & \geq 6 \\ & 2x + 3y & \leq 12 \\ & x\,,\,y & \geq 0 \end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível do problema.



b) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{array}{lll} \min & z = x + y & \\ \text{s.a} & 2x + 3y - f_1 & = 6 \\ & 3x + 2y - f_2 & = 6 \\ & 2x + 3y + f_3 & = 12 \\ & x\,,\ y,\ f_1,\ f_2,\ f_3 & \geq 0, \end{array}$$

com $f_1 = 2x + 3y - 6$, $f_2 = 3x + 2y - 6$ e $f_3 = 12 - (2x + 3y)$.

c) Indique o número de soluções básicas admissíveis e dê exemplo de uma delas.

Admite 5 soluções básicas admissíveis (= número de vértices da região admissível $\mathcal{R}$).
Por exemplo, a s.b.a. $\widehat{A} = (3, 0, 0, 3, 6)$ associada ao vértice $A = (3, 0)$)

[1.25v] **6.** Seja A uma matriz de tipo $m \times 3$ com $m \geq 3$, tal que $A = [\, u_1 \ u_2 \ u_3 \,]$. Sabendo que $\text{car}(A) = 3$, prove que $\{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_3\}$ é linearmente independente.