# Subespaços vetoriais e respetivos complementos ortogonais

## Quadros-resumo do complemento ortogonal de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

| $V \subset \mathbb{R}^2$ | $V^\perp \subset \mathbb{R}^2$ | $\dim V + \dim V^\perp$ |
|---|---|---|
| $\{\vec{0}\}$ | $\mathbb{R}^2$ | 0+2 |
| reta que passa na origem | reta perpendicular que passa na origem | 1+1 |
| $\mathbb{R}^2$ | $\{\vec{0}\}$ | 2+0 |

| $V \subset \mathbb{R}^3$ | $V^\perp \subset \mathbb{R}^3$ | $\dim V + \dim V^\perp$ |
|---|---|---|
| $\{\vec{0}\}$ | $\mathbb{R}^3$ | 0+3 |
| reta que passa na origem | plano perpendicular que passa na origem | 1+2 |
| plano que passa na origem | reta perpendicular que passa na origem | 2+1 |
| $\mathbb{R}^3$ | $\{\vec{0}\}$ | 3+0 |

## Observação: para qualquer $m \geq 2$ tem-se

- $\dim(\mathbb{R}^m)^\perp = m - \dim \mathbb{R}^m = 0$ e portanto $(\mathbb{R}^m)^\perp = \{\vec{0}\}$.
- $\dim\{\vec{0}\}^\perp = m - \dim\{\vec{0}\} = m$ e portanto $\{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^m$.

Tem-se portanto que
- subespaço maximal$^\perp$ = subespaço minimal
- subespaço minimal$^\perp$ = subespaço maximal



# Caso dos subespaços vetoriais dados por equações

- Vimos no slide slide 119 que se $W = V^\perp$ então $W^\perp = V$. Logo, como $\mathcal{N}(A^T) = \mathcal{C}(A)^\perp$, conclui-se que $\mathcal{N}(A^T)^\perp = \mathcal{C}(A)$. Substituindo na relação anterior $A^T$ por $B$ tem-se $A = (A^T)^T = B^T$, obtendo-se $\mathcal{N}(B)^\perp = \mathcal{C}(B^T)$ (e podemos substituir, obviamente, $B$ por $A$...)

  Têm-se portanto as duas fórmulas abaixo que permitem calcular o complemento ortogonal de um subespaço vetorial dado por geradores, $V = \mathcal{C}(A)$ e / ou de um subespaço vetorial definido por um sistema de equações homogéneas, $V = \mathcal{N}(A)$:

## Complemento ortogonal de subespaços definidos por matrizes

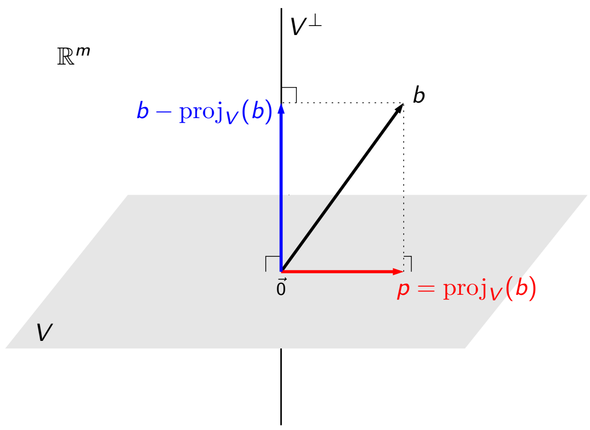
| $V$ | $V^\perp$ |
|---|---|
| $\mathcal{C}(A)$ | $\mathcal{N}(A^T)$ |
| $\mathcal{N}(A)$ | $\mathcal{C}(A^T)$ |

O complemento ortogonal do espaço das colunas [resp. espaço nulo] de uma matriz é o espaço nulo [resp. espaço das colunas] dessa matriz transposta.

# Conceito de projeção ortogonal

## Teorema-definição

- Seja $V$ um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ existe um e um só $p \in V$ tal que $b - p \in V^{\perp}$, isto é, tal que $b - p \perp V$.
- O vetor $p$ é designado por *projeção ortogonal de $b$ sobre $V$* e denota-se por $\text{proj}_V(b)$.






# Conceito de projeção ortogonal

A definição anterior significa que o vetor $p = \text{proj}_V(b)$ é caracterizado por duas propriedades:

- $p \in V$ $\rightarrow$ projecta $b$ sobre o subespaço vetorial $V$.
- $(b - p) \perp V$ $\rightarrow$ a direção da projeção é perpendicular a $V$.

## Exercício na aula

Sejam $b = (-1, 1, 3)$, $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$ e $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. Mostre que $\text{proj}_V(b) = (0, 2, 2)$.

**Resolução**: por definição é necessário mostrar que $p = (0, 2, 2)$ verifica as seguintes 2 condições:

- $p \in V$.
- $(b - p) \perp V$, isto é, $(b - p) \in V^{\perp}$.

## Exercício na aula (cont.)

Tem-se:

- $p = (0,2,2) \in V = \langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(A)$, onde $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$, se e só se $Ax = p$ for possível. Ora,

$$[\,A \,|\, p\,] = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

  Como o sistema $Ax = p$ é possível, $p = (0,2,2) \in V$.

- $b - p = (-1,1,3) - (0,2,2) = (-1,-1,1) \in V^{\perp} = \mathcal{C}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^T)$ se e só se $A^T(b-p) = \vec{0}$. De facto,

$$A^T(b-p) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

  Logo $(b-p) \in V^{\perp}$ (alternativamente pode-se mostrar que $b-p$ é ortogonal aos geradores de $V$, i.e., $(b-p) \cdot v_1 = (b-p) \cdot v_2 = 0$).

Uma vez que as duas condições são verificadas, $p = \text{proj}_V(b)$.



## Casos triviais: projeção ortogonal sobre os subespaços maximal e minimal

A projeção ortogonal sobre o subespaço maximal $\mathbb{R}^m$ ou sobre o subespaço minimal $\{\vec{0}\}$ decorre imediatamente por definição:

- $\text{proj}_{\mathbb{R}^m}(b) = b$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = b \in \mathbb{R}^m$.
  - $b - p = b - b = \vec{0} \in (\mathbb{R}^m)^{\perp} = \{\vec{0}\}$.

- $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(b) = \vec{0}$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

  De facto,
  - $p = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$.
  - $b - \vec{0} = b \in \{\vec{0}\}^{\perp} = \mathbb{R}^m$.

E sobre outros subespaços vetoriais ?

O caso não trivial mais simples corresponde a calcular a projeção ortogonal sobre um subespaço vetorial de dimensão um, isto é, sobre uma reta que passa na origem.

# Projeção ortogonal sobre uma reta

## Fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta

Seja $V = \langle v \rangle$ com $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Para qualquer $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\boxed{\mathrm{proj}_V(b) = \mathrm{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v^T b}{v^T v} v = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v}$$

**Demonstração**: Por definição de projeção ortogonal,

- $p \in V = \langle v \rangle = \mathcal{C}(v)$. Logo existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p = \alpha v$.
- $(b - p) \in V^\perp = \mathcal{N}(v^T)$. Logo $v^T(b - p) = 0$.

Têm-se as equivalências,

$$\begin{aligned} v^T(b-p) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad v^T(b - \alpha v) = 0 \Leftrightarrow v^T b - \alpha v^T v = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha v^T v = v^T b \Leftrightarrow \alpha = \frac{v^T b}{v^T v} = \frac{v \cdot b}{v \cdot v}.\text{[10]} \end{aligned}$$

Logo $p = \alpha v = \dfrac{v^T b}{v^T v} v = \dfrac{v \cdot b}{v \cdot v} v.$ $\square$

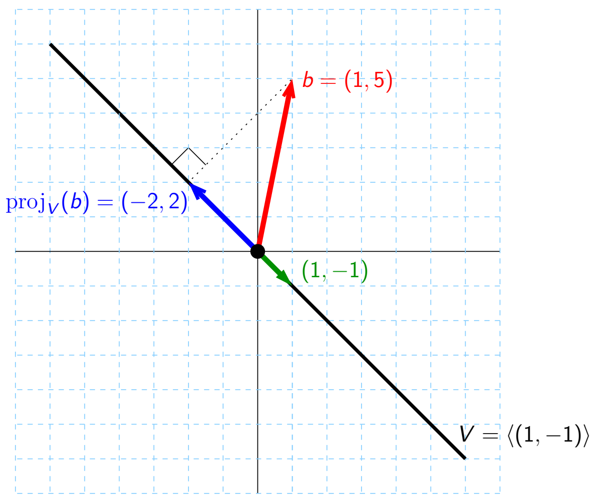
[10] Note-se que $v \cdot v = \|v\|^2 \neq 0$, pois $\|v\|$ é o comprimento (norma) do vetor $v \neq 0$ (como veremos mais adiante).



# Projeção ortogonal sobre uma reta - exemplo

Sejam $b = (1, 5)$ e $V = \{(x_1, x_2) \ : \ x_1 = -x_2\}$ a bissectriz dos quadrantes pares. Então $V$ é uma reta que passa na origem com vetor director $(1, -1)$ (por exemplo), tendo-se $V = \langle (1, -1) \rangle$. Logo,

$$\mathrm{proj}_V(b) = \mathrm{proj}_{\langle (1,-1) \rangle}(b) = \frac{(1,-1) \cdot (1,5)}{(1,-1) \cdot (1,-1)}(1, -1) = (-2, 2).$$



# Projeção ortogonal sobre um vetor

### Fórmula da projeção ortogonal sobre um vetor

Seja $v \in \mathbb{R}^m$ e $v \neq \vec{0}$. Dado $b \in \mathbb{R}^m$ define-se a *projeção ortogonal de $b$ sobre o vetor $v$*, denotada $\mathrm{proj}_v(b)$, como sendo a projeção de $b$ sobre a reta definida por $v$, isto é,

$$\mathrm{proj}_v(b) = \mathrm{proj}_{\langle v \rangle}(b) = \frac{v \cdot b}{v \cdot v} v$$

Voltando ao exemplo do slide anterior, tem-se

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{(-4,4)}(1,5) &= \mathrm{proj}_{\langle(-4,4)\rangle}(1,5) = \frac{(-4,4)\cdot(1,5)}{(-4,4)\cdot(-4,4)}(-4,4) \\ &= \frac{1}{2}(-4,4) = (-2,2). \end{aligned}$$



# Uma decomposição fundamental

### Observação

Se $p = \mathrm{proj}_V(b)$ tem-se por definição:

- $p \in V$
- $b - p \in V^\perp$

Logo $b - p = \mathrm{proj}_{V^\perp}(b)$. De facto,

- $q = b - p \in V^\perp$
- $b - q = b - (b - p) = p \in V = (V^\perp)^\perp$

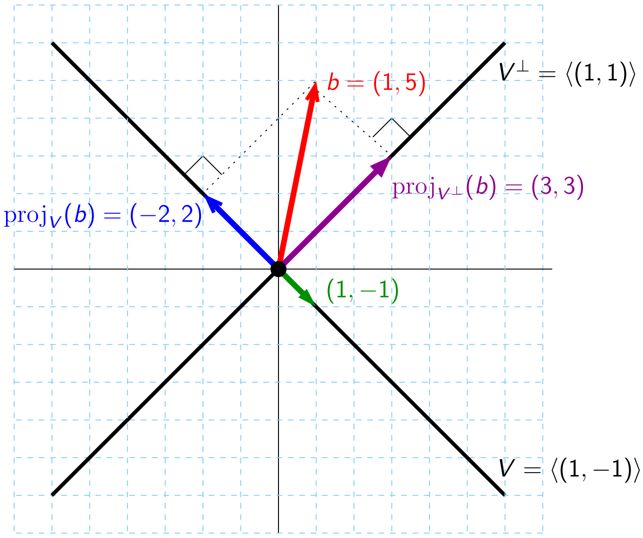
Como $b = p + (b - p)$ obtivemos a seguinte decomposição (única) de $b$ segundo $V$ e $V^\perp$:

$$\boxed{b = \mathrm{proj}_V(b) + \mathrm{proj}_{V^\perp}(b)}$$

## Exemplo do slide 128 revisitado

Considerando novamente $V = \langle(1,-1)\rangle$ e $b = (1,5)$, obtém-se a decomposição descrita no slide anterior,

$$b = (1,5) = \mathrm{proj}_V(b) + \mathrm{proj}_{V^\perp}(b) = (-2,2) + (3,3).$$




**TPC**: verifique que $V^\perp = \langle(1,1)\rangle$.



## Aplicação: projeção sobre um espaço de codimensão um

Seja $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ tal que $\dim V = m-1$ ([11]). Tem-se então $\dim V^\perp = m - \dim V = 1$ e portanto $V^\perp$ é uma reta tendo-se $V^\perp = \langle w\rangle$ para algum vetor diretor $w \neq \vec{0}$. Pela decomposição do slide 130 e pela fórmula da projeção sobre uma reta obtém-se

$$\boxed{\mathrm{proj}_V(b) = b - \mathrm{proj}_{V^\perp}(b) = b - \frac{w \cdot b}{w \cdot w} w}$$

Vejamos um exemplo. Sejam $V = \{(x_1,x_2,x_3) \colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ que define um plano de dimensão 2 e $b = (1,1,1)$. Pretende-se calcular $\mathrm{proj}_V(b)$.

Tem-se $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = [\,1 \;\; 2 \;\; 3\,]$. Tem-se (ver o slide slide 122),

$$V^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \langle(1,2,3)\rangle.$$

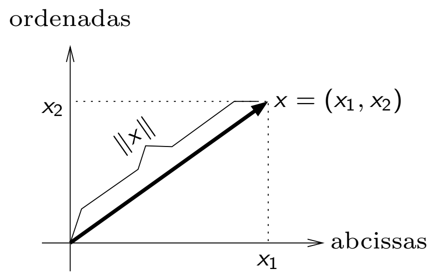
Logo $V^\perp$ é uma reta com vetor diretor $(1,2,3)$ e tem-se

$$\mathrm{proj}_{V^\perp}(b) = \mathrm{proj}_{\langle(1,2,3)\rangle}((1,1,1)) = \frac{(1,2,3)\cdot(1,1,1)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}(1,2,3) = \frac{3}{7}(1,2,3).$$

Logo $\mathrm{proj}_V(b) = b - \mathit{proj}_{V^\perp}(b) = (1,1,1) - \frac{3}{7}(1,2,3) = \frac{1}{7}(4,1,-2)$.

[11] Diz-se que $V$ tem codimensão um.

## Interlúdio: norma de um vetor do plano

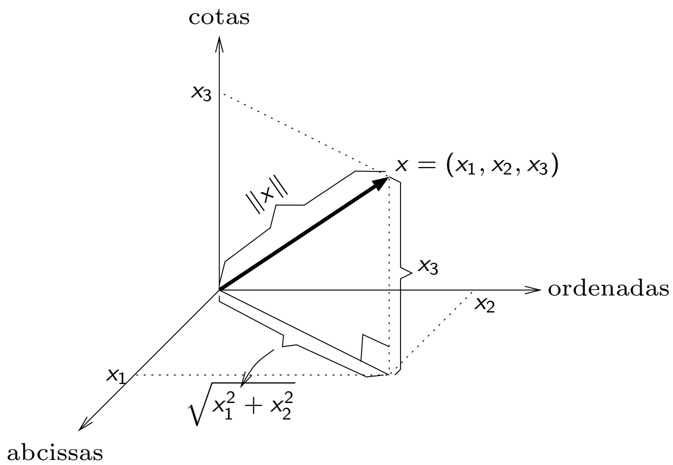



$\|x\|$ representa a norma ou comprimento do vetor $x$, ou seja, a distância do vetor à origem. Pelo teorema de Pitágoras obtém-se,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^T x}$$



## Norma de um vetor do espaço




Analogamente, tem-se pelo teorema de Pitágoras,

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, x_3)\| = \sqrt{\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_3^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{x \cdot x}$$

## Norma e distância entre vetores

Em geral, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ define-se a sua norma de forma análoga:

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}}$$

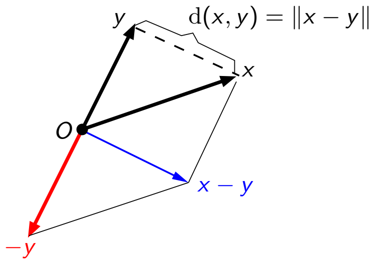
Por exemplo,

$$\|(4,2,-1,2)\| = \sqrt{(4,2,-1,2)\cdot(4,2,-1,2)} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 5$$

.

A partir da norma define-se a *distância (euclideana)* entre $x, y \in \mathbb{R}^n$, por

$$\mathrm{d}(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$




Por exemplo,

$$\begin{aligned} d((1,3,2,1),(1,4,3,-1)) &= \|(1,3,2,1) - (1,4,3,-1)\| \\ &= \|(0,-1,-1,2)\| = \sqrt{6}. \end{aligned}$$



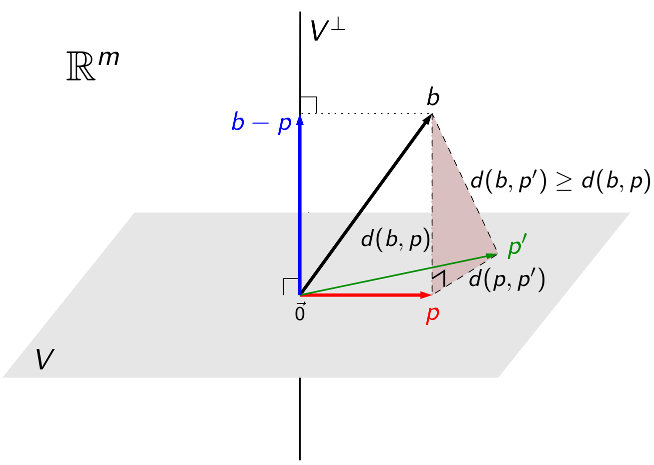
## A projeção ortogonal é o vetor a menor distância...

### Teorema

Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. Então a $\mathrm{proj}_V(b)$ é o vetor de $V$ a menor distância de $b$

Ideia da demonstração: pelo teorema de Pitágoras com $p = \mathrm{proj}_V(b)$, tem-se

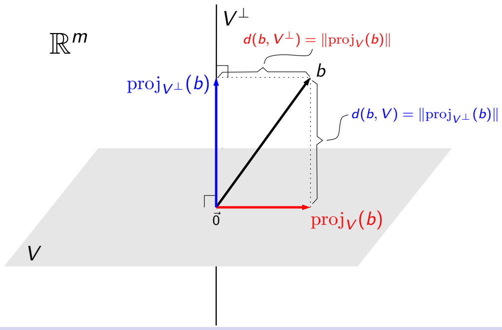
$$d(b,p')^2 = d(b,p)^2 + \underbrace{d(p,p')^2}_{\geq 0} \geq d(b,p)^2 \Rightarrow d(b,p') \geq d(b,p), \quad \forall p' \in V.$$



# Distância de um vetor a um subespaço vetorial

Denotando por $d(b, V)$ a distância do vetor $b$ ao subespaço $V$, que se define como a distância de $b$ ao vetor de $V$ mais próximo de $b$, tem-se:

- $d(b, V) = d(b, \text{proj}_V(b)) = \|b - \text{proj}_V(b)\| = \|\text{proj}_{V^\perp}(b)\|$.
- $d(b, V^\perp) = d(b, \text{proj}_{V^\perp}(b)) = \|b - \text{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|\text{proj}_V(b)\|$.
- $d(b, V)^2 + d(v, V^\perp)^2 = \|b\|^2$ (pelo teorema de Pitágoras).




### Observação

Note-se que a distância de $b$ ao subespaço $V$ ou $V^\perp$ é nula se e só se o vetor pertencer a esse subespaço. De facto,

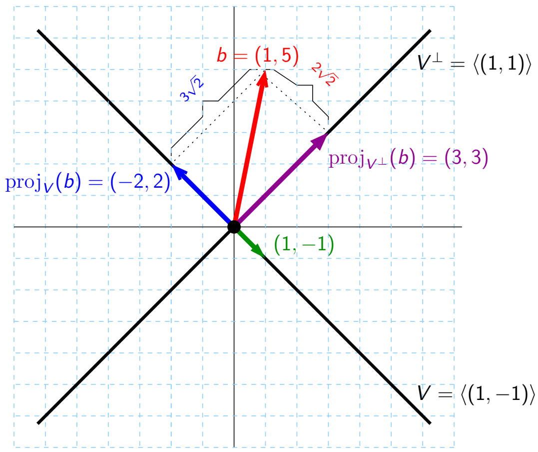
- $d(b, V) = 0 \Leftrightarrow \text{proj}_{V^\perp}(b) = \vec{0} \Leftrightarrow b = \text{proj}_V(b) \Leftrightarrow b \in V$.
- $d(b, V^\perp) = 0 \Leftrightarrow \text{proj}_V(b) = \vec{0} \Leftrightarrow b = \text{proj}_{V^\perp}(b) \Leftrightarrow b \in V^\perp$.



# Distância de um vetor a um subespaço vetorial - exemplo do slide 128

Considerando novamente $V = \langle(1, -1)\rangle$ e $b = (1, 5)$ do slide 128 tem-se:

- $d(b, V) = \|b - \text{proj}_V(b)\| = \|\text{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|(3, 3)\| = 3\sqrt{2}$.
- $d(b, V^\perp) = \|b - \text{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|\text{proj}_V(b)\| = \|(-2, 2)\| = 2\sqrt{2}$.
- $d(b, V)^2 + d(v, V^\perp)^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 26 = \|(1, 5)\|^2 = \|b\|^2$.



## Equações normais

Sejam $V \subset \mathbb{R}^m$ subespaço vetorial de dim $n$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $V$ e $A = [\, v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n \,]_{m\times n}$ a respetiva matriz da base. Em particular, $V = \mathcal{C}(A)$ e $\mathrm{car}(A) = \dim \mathcal{C}(A) = \dim V = n$. Seja $b \in \mathbb{R}^m$. Por definição de projeção ortogonal, $p = \mathrm{proj}_V(b)$ verifica:

(i) $p \in V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$, isto é, $Ax = p$ é possível e portanto existe uma solução $\bar{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tal que $p = A\,\bar{x}$.([12])

(ii) $(b - p) \in \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$, isto é, $A^T(b - p) = \vec{0}$.

Tem-se então,

$$\begin{aligned} A^T(b-p) = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad A^T(b - A\,\bar{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow A^T b = A^T A\,\bar{x} \\ &\Leftrightarrow \quad A^T A\,\bar{x} = A^T b. \end{aligned}$$

O vetor $\bar{x}$ é portanto a solução do sistema de equações lineares,

$$\boxed{A^T A\, x = A^T b.}$$

que se designa por sistema das equações normais. Uma vez que $A$ é a matriz de uma base de $V$, o sistema é PD como veremos a seguir. Tem-se então $\mathrm{proj}_V(b) = p = A\,\bar{x}$ com $\bar{x}$ solução do sistema de equações normais.

[12] Note-se que $p = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$.



## Método das equações normais

### Algoritmo

`Input:` $V$ subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
`Objectivo:` Calcular $\mathrm{proj}_V(b)$.

- Determinar uma base para $V$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
  Seja $A = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ a matriz da base.
- Determinar a solução única $\bar{x}$ das equações normais, $A^T A\, x = A^T b$.
- Tem-se então $\mathrm{proj}_V(b) = A\,\bar{x}$.

### Exercício na aula

- Determinar a projeção ortogonal de $b = (1, 0, 4)$ sobre o subespaço vetorial $V = \big\langle (1, 0, 1), (1, 1, 2) \big\rangle$ utilizando o método das equações normais e indicar as distâncias de $b$ a $V$ e a $V^\perp$.
- **TPC**: recalcular a projeção de $b = (1, 0, 4)$ sobre $V$ começando por calcular a projeção sobre $V^\perp$ (reta).

# Exercício na aula (resolução)

- $\{v_1, v_2\} = \{(1,0,1),(1,1,2)\}$ é base de $V = \langle (1,0,1),(1,1,2)\rangle$ (justifique!). Seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$ a matriz da base.
- Tem-se:

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \\ A^T b &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A solução (única) do sistema $A^T A x = A^T b$ é $\bar{x} = (1,1)$. De facto,

$$[\, A^T A \,|\, A^T b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

- $\mathrm{proj}_V(b) = A\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$

$d(b, V) = \|\mathrm{proj}_V^{\perp}(b)\| = \|b - \mathrm{proj}_V(b)\| = \|(1,0,4)-(2,1,3)\| = \|(-1,-1,1)\| = \sqrt{3}.$
$d(b, V^{\perp}) = \|\mathrm{proj}_V(b)\| = \|(2,1,3)\| = \sqrt{14}.$