Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

EXERCÍCIOS 1.

1. Calcule as normas dos seguintes vectores.

   (a) $(1,-1,2)$

   (b) $(-1,0,\pi,0)$

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$

   a) $\sqrt{6}$, **b)** $\sqrt{1+\pi^2}$, **c)** 6

2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.

   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.

   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

   a) $\sqrt{5}$, **b)** 3, **c)** $\sqrt{51}$

3. Determine todos os vectores unitários que fazem ângulos de $\frac{\pi}{3}$ com cada um dos seguintes pares de vectores.

   (a) $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$.

   (b) $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$.

   a) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, **b)** $(\frac{\sqrt{2}+2}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}-2}{4})$, $(\frac{\sqrt{2}-2}{4},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}+2}{4})$

4. Indique um vector não nulo que seja ortogonal a ambos os vectores de cada um dos seguintes pares.

   (a) $(1,0,1)$ e $(1,1,-1)$.

(b) $(1,-1,2)$ e $(2,1,-1)$.

a) Por exemplo, $(-1,2,1)$, **a)** Por exemplo, $(-1,5,3)$

5. Indique dois vectores não nulos ortogonais entre si e ortogonais ao vector de cada uma das alíneas seguintes.

   (a) $(1,1,1)$.

   (b) $(1,2,1,-3)$.

a) Por exemplo, $(1,-1,0),(1,1,-2)$, **b)** Por exemplo, $(2,-1,0,0),(0,0,3,1)$

6. Sejam x e y vectores de $\mathbb{R}^n$. Prove e interprete geometricamente:

   (a) $\|x+y\|=\|x-y\|$ se e só se x e y são ortogonais.

   (b) Os vectores $x+y$ e $x-y$ são ortogonais se e só se $\|x\|=\|y\|$.

   (c) Se x e y são ortogonais então $\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

   (d) Os vectores x e y são unitários e ortogonais então $\|x-y\|=\sqrt{2}$.

a) Sugestão: considere $\|x+y\|^2=\|x-y\|^2\ldots$

EXERCÍCIOS 2.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\2&7&1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5&4&1\\2&-3&-4\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0&-2\\1&-1\\-3&-4\end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$$

Calcule, sempre que possível, o valor das seguintes expressões.

a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top-C$ c) $(2(A^\top-C)^\top+B)^\top$
d) $(B^\top-C)^\top+2B^\top$ e) $D+D^\top$ f) $D-D^\top$.

a) $\begin{bmatrix}17&0&1\\10&25&0\end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix}1&4\\-7&18\\2&10\end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix}11&10\\0&13\\7&6\end{bmatrix}$, **d)** Não definido, **e)** $\begin{bmatrix}2&5\\5&8\end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha\begin{bmatrix}1&0\\-2&4\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}6&2\\4&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\8&-12\end{bmatrix}.$$

$\alpha=-3,\ \beta=\frac{1}{2}$

EXERCÍCIO 3. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ -4 & 0 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \text{ e } a=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, CC, $AA^\top$, $a^\top a$, $a\,a^\top$ e B^3.

$AB=\begin{bmatrix}8 & -4 & -2\\ -11 & -2 & 9\end{bmatrix}$, BA não definida, $BA^T=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\\ 3 & -6\end{bmatrix}$, $CC=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,

$AA^T=\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 10\end{bmatrix}$, $a^Ta=14$, $aa^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$, $B^3=\begin{bmatrix}20 & -4 & -1\\ 10 & 8 & -23\\ 15 & 10 & 10\end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS 4.

1. Sejam $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 3\end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$.

   a) Calcule $Ab+Ib$, $(A+I)b$, $(A+A^\top)2b$ e $b^\top b$.

   b) Resolva a equação matricial $Ax=3x+b$, com $x\in\mathbb{R}^3$.

   a) $Ab + Ib = (A+I)b = \begin{bmatrix}10\\ -6\\ 10\end{bmatrix}$, $(A+A^\top)2b = \begin{bmatrix}32\\ -30\\ 28\end{bmatrix}$, $b^Tb = 14$,

   b) $CS=\left\{\left(\frac{3}{10},-\frac{6}{5},\frac{7}{5}\right)\right\}$

2. Considere a matriz $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ e o vetor genérico de $\mathbb{R}^2$ $v=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$.

   a) Calcule, em função de x e y, o vetor Av e represente geometricamente v e Av.

   b) Qual é a relação entre entre os vetores v e Av?

   a) $Av=\begin{bmatrix}-y\\ x\end{bmatrix}$, **b)** são ortogonais ($Av\cdot v=0$)

EXERCÍCIOS 5.

1. Para que valores de b o sistema

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 &= 4\\ 4x_1+6x_2 &= b\end{cases}$$

   é impossível?

   $b\neq 8$

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - \ x_3 & = & 4 \\ \ \ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

de forma a obter um sistema impossível.

Por exemplo, $3x_1 + 2x_3 = 5$ (como exercício adicional interprete geometricamente o sistema impossível que se obtém com esta solução no contexto dos 8 casos do esquema da página 28 do Texto de Apoio e indique uma solução alternativa para este exercício que corresponda geometricamente a um caso distinto

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema) de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

a) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

a) IMP - representa 4 retas não concorrentes num ponto **b)** PD - representa 3 planos que se intersectam num único ponto (1º caso do esquema da página 28), **c)** PI - representa 3 planos não paralelos nem coincidentes que são concorrentes numa reta (2º caso do esquema da página 28)

Verifique adicionalmente que o ponto de intersecção referido em b) tem coordenadas $(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$ e que a reta de intersecção referida em c) passa na origem e tem vetor diretor $(-3, 4, 1)$.

EXERCÍCIOS 6. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares.

1. $\begin{cases} x + 2y + 3z = & 0 \\ x + \ \ y + \ \ z = & 10 \\ x \qquad\ + 2z = & 0 \end{cases}$

$CS = \{(\frac{40}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{20}{3})\}$

2. $\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = & 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + \ \ x_3 = & 9 \\ \ \ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = & 1 \end{cases}$

$CS = \{(-1, 2, 1)\}$

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 1 - 5x_4, x_2 = 2 + 2x_4, x_3 = -1, x_4 \in \mathbb{R}\}$

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 = 13 - 2x_2 + 8x_5, x_3 = -5 - 3x_5, x_4 = 4 + 2x_5, x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}.$

$CS = \{(1, -1, -2, 3)\}$

EXERCÍCIOS 7.

1. Discuta, para todos os valores dos parâmetros, cada um dos seguintes sistemas.

   a) $\begin{cases} x - z = 1 \\ y + az = 0 \\ -x + y + 2az = 1 \end{cases}, \ a \in \mathbb{R}$

   b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 = 1 \end{cases}, \ \gamma \in \mathbb{R}.$

   c) $\begin{cases} ax + 2z = 2 \\ x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases}, \ a, b \in \mathbb{R}$

   d) $\begin{cases} 2x + 4y + bz = 2 \\ x + (d+2)y = 1 \\ x + 2y + bz = 1 \\ x + 2y = c \end{cases}, \ b, c, d \in \mathbb{R}.$

a) Se $a \neq 1$ é PD. Se $a = 1$ é IMP, **b)** PD $\forall \gamma$, **c)** Se $ab \neq 4$ é PD. Se $ab = 4$ com $a \neq 1$ é IMP. Se $a = 1$ e $b = 4$ é PI (com variável livre x_3), **d)** Se $c \neq 1$ é IMP $\forall b, d$. Se $c = 1$ e $b, d \neq 0$ é PD. Se $c = 1$ e $bd = 0$ é PI (com variáveis livres x_2 e x_3 se

$b = d = 0$, com variável livre x_3 se $b = 0$ e $d \neq 0$ e com variável livre x_2 se $b \neq 0$ e $d = 0$)

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $m - n$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e $m = n$, então S é determinado.

   SÃO TODAS FALSAS (para cada alínea apresente um *contra-exemplo*, ou seja, um exemplo que mostre que a afirmação é falsa)

EXERCÍCIOS 8.

1. Considere os sistemas de equações lineares cujas correspondentes matrizes ampliadas são

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

   a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

   b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

   c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que façam o sistema

      c1) impossível,

      c2) indeterminado.

   a) $a \neq 1$, **b)** Se $b_1 - b_2 + b_3 = 0$, **c1)** $a = 1$ e b_1, b_2, b_3 tal que $b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$. Por exemplo, $b = (0, 0, 1)$, **c2)** Se $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. Por exemplo, $b = (1, 2, 1)$

2. É correto afirmar que um sistema de equações lineares do tipo $n \times n$ é possível e determinado se e só se a matriz reduzida que se obtém quando se aplica o método de Gauss à matriz dos coeficientes é a matriz identidade? Justifique.

   SIM

3. Seja E uma matriz em escada do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

a) Podem existir <u>no máximo</u> o menor dos 2 números m e n, **b)** número de linhas nulas de E é igual $m-$ número de pivots de E

EXERCÍCIOS 9.

1. Considere $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema homogéneo $(A-\lambda I)x=\vec{0}$, com $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Indique a característica de $A-\lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

   b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av=\lambda v$.

   c) Resolva o sistema considerando $\lambda=-1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções e a relação estabelecida na alínea b).

a) $\text{car}(A)=2$ se $\lambda=-1$ ou $\lambda=2$ e $\text{car}(A)=3$ para $\lambda \neq -1, 2$. O sistema é indeterminado para $\lambda=-1$ ou $\lambda=2$. **c)** $CS=\{((x_1,x_2,x_3): x_1=-x_3, x_2=-x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que representa a reta que passa na origem e tem vetor diretor $(-1,-1,1)$

EXERCÍCIO 10. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

EXERCÍCIO 11. Prove os resultados da Proposição 11 do Texto de Apoio.

EXERCÍCIOS 12.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$, singular, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$.

2. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A+B$ é invertível?
   b) Será que a matriz A^3BC^{-1} é invertível?
   c) Mostre que $A^{-1}(A+B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
   d) Prove que se $AB = AC$, então $B = C$.

4. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.
   b) Prove que os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$ são equivalentes sse $b = A^2c$.
   c) Sejam u, v e w as soluções dos sistemas

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   respetivamente. Determine, em termos dos vetores u, v e w, a inversa de A.

   a) ambos PD com solução $A^{-1}b$ e Ac, respetivamente, **b)** $A^{-1} = \left[\frac{1}{3}u \mid v \mid \frac{1}{2}w\right]$

5. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Mostre que as proposições seguintes são equivalentes.

   a) A é invertível.
   b) $Ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
   c) O sistema $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3+\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

a) Se $\alpha \neq -2$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = -2$ e $\beta = -1$ é PI (com uma variável livre). Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq -1$ é IMP, **b)** $CS = \{(0,0,1)\}$, **c)** Qualquer $\alpha \neq -2$. Por exemplo, $\alpha = 0$

7. Seja $Ax = b$ um sistema que admite as soluções não nulas u e v. Em que condições o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

   $b = \vec{0}$

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 13.

1. Sejam u, v vetores de $\mathbb{R}^n$ tais que u é unitário, v tem norma 2 e o cosseno do ângulo por eles formado tem valor $\frac{1}{4}$. Mostre que $3u - v$ e $u + v$ são ortogonais.

2. Calcule $A^2 + 3bb^\top$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 7 \\ -14 & 7 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

(a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

a) $CS = \{(x,y,z) : x = 0, y = 1 - z, z \in \mathbb{R}\}$; **b)** $CS = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = 4 + 2x_2, x_3 = 3, x_4 = -1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

4. Determine todos os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução de $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$(0,1,2,4)$ e $\left(-\frac{10}{3}, -\frac{7}{3}, 2, \frac{2}{3}\right)$

5. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

(e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(f) $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ é IMP. Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 2$ é IMP. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 2$ é PI **b)** Se $\alpha \neq 2$ é PD. Se $\alpha = 2$ é IMP **c)** Se $\beta \neq 1$ é IMP $\forall \alpha$. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -5$ é PD. Se $\beta = 1$ e $\alpha = -5$ é IMP. **d)** Se $\alpha \neq 14$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 14$ e $\beta \neq 6$ é IMP. Se $\alpha = 14$ e $\beta = 6$ é PI. **e)** Se $\alpha \neq 3$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$ é IMP. Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ é PI. **f)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

6. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   Se $b = 0$ ou $a = b$ é IMP. Se $b \neq 0$ e $a \neq b$ é PD.

7. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

   admita a solução $(2, -1, 2)$.

   $a = b = c = 1$

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que define uma reta que passa na origem com vetor diretor $(-1, 1, 1)$

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = 0$.

   $\alpha = 2$

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

    a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

    b) Qual é a característica de A?

    c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

    a) $\{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_1 = b_3 + b_4, b_2 = 2b_3 + b_4, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$; **b)** 2; **c)** $(1, 0, 0, 0)$

11. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

   (c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

   a) Se $\alpha \neq 1$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ é IMP; **b)** $\alpha \neq 1$;
   c) $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

12. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?

   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

13. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

   (a) $(C + X)A = D$.

   (b) $B(CA + 3X) = DX$.

   (c) $ABX = I$.

   (d) $3X + AX = I$.

   (e) $(AB)^{-1} BAX = I$.

   (f) $(X - A)^2 = B + (X - A)X$.

   (g) $ABX(AB)^{-1} = I$.

   (h) $BX + XA = I$.

14. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

$$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \;\; 3\,]$.

   (a) Qual o tipo da matriz X?

   (b) Determine X.

a) 2×2; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

15. Determine matrizes X e Y tais que $3X - 2Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X + Y = 2I$.

    $X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

16. EXERCÍCIO MODIFICADO

    Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine a inversa de A (caso exista).

    (b) Resolva a equação matricial $AX = B$.

    a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -5 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

17. Considere uma matriz A tal que $PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, em que $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

    (a) Calcule P^{-1}.

    (b) Determine A.

    (c) Calcule A^{10}.

    a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & 10 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 4093 & 2046 \\ -6138 & -3068 \end{bmatrix}$

18. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3 = 0$.

    Mostre que $(I - A)^{-1} I = I + A + A^2$.

19. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

    é invertível. $\lambda \neq \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. Escreva uma equação vetorial equivalente a

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Capítulo 2

Espaços vetoriais

EXERCÍCIOS 14.

1. Determine os espaços nulo e das colunas das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

a) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{4}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2) : b_2 = -2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$
b) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0)\}$ $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$
c) $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}(A) = \{(0,0)\}$
d) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3,\ x_2 = 2x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 = b_2 + b_1,\ b_1 \in \mathbb{R},\ b_2 \in \mathbb{R}\}$
e) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{2}{5}x_3,\ x_2 = \frac{1}{5}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_3 = b_2 + 2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R},\ b_2 \in \mathbb{R}\}$
f) $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$ $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$
g) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4x_3,\ x_2 = 3x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$
h) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 2x_2 - 2x_3,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R}\}$ $\mathcal{C}(A) = \{(b_1, b_2) : b_2 = 3b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$

i) $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2) : x_1 = \frac{1}{3}x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ $\quad \mathscr{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3) : b_2 = 3b_1,\ b_3 = 2b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}\}$

2. Verifique se o vetor $(-3, 12, 12)$ é combinação linear dos vetores $v_1 = (-1, 3, 1)$, $v_2 = (0, 2, 4)$, $v_3 = (1, 0, 2)$.

   É C.L. (qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ é C.L. de v_1, v_2, v_3. Justifique!)

3. Verifique se o vetor $(3, 1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$.

   $(3, 1)$ pertence ao espaço das colunas ($\mathbb{R}^2$).

4. Verifique se o vetor $(0, 1, 4)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

   $(0, 1, 4)$ não pertence ao espaço das colunas.

5. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V.

   a) $u = (3, -5)$, $\quad V = \{(1, 2), (-2, 6)\}$;
   É C.L.

   b) $u = (1, 1, 1)$, $\quad V = \{(1, 0, 1), (0, 3, 5)\}$;
   Não é C.L.

   c) $u = (2, -2, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $\quad V = \{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 3, 1, 1)\}$;
   É C.L.

   d) $u = (0, 1, 0, 1, 0)$, $\quad V = \{(1, 2, 2, 1, 1), (\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})\}$.
   Não é C.L.

EXERCÍCIO 15. Decida sobre a independência linear de $U = \{(1, 2, -1), (0, 2, 1), (2, -1, 3)\}$ e $U' = \{(1, 2, -1), (0, 2, 1), (2, -1, 3), (4, 5, -2)\}$.

U l.i. e U' l.d. (4 vetores em $\mathbb{R}^3$ são sempre l.d.).

EXERCÍCIOS 16.

1. Quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes?

   a) $\{(3, 1), (4, -2)\}$
   l.i.

   b) $\{(3, 1), (4, -2), (7, 2)\}$
   l.d.

   c) $\{(-1, 2, 0, 2), (5, 0, 1, 1), (8, -6, 1, -5)\}$
   l.d.

d) $\{(0,-3,1),(2,4,1),(-2,8,5)\}$.
l.i.

2. Mostre que o conjunto de vetores $\{(1,0,3,1),(-1,1,0,1),(2,3,0,0),(1,1,6,3)\}$ é linearmente dependente.
Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?

Não, pois $(2,3,0,0)$ não é C.L. dos restantes vetores.

3. Discuta em função dos parâmetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.

a) $\{(1,-2),(\alpha,-1)\}$
l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1}{2}$.

b) $\{(\alpha,1,1),(1,\alpha,1),(1,1,\alpha)\}$
l.i. $\Leftrightarrow \alpha \neq -2, 1$.

c) $\{0,\gamma,-\beta),(-\gamma,0,\alpha),(\beta,-\alpha,0)\}$.
l.d. $\forall \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$.

4. Sabendo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente, decida sobre a independência linear do conjunto $\{v_1+v_2, v_1+v_3, v_2+v_3\}$.

Sugestão: prove por definição…

EXERCÍCIOS 17. Indique uma base para cada um dos seguintes conjuntos.

1. $\mathbb{R}^3$.

Uma possível base é a base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

2. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1+4x_2-2x_3=0$.

Uma possível base é $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$.

3. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1-6x_2+3x_3-2x_4+9x_5=0$.

Uma possível base é $\{(2,1,0,0,0),(-1,0,1,0,0),(\frac{2}{3},0,0,1,0),(-3,0,0,0,1)\}$.

EXERCÍCIOS 18.

1. Determine uma base para o espaço nulo e para o espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,-3,1,0),(2,-4,0,1)\}$. Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,0),(0,1)\}$.
b) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0)\}$. Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,1),(3,5)\}$
c) Possível base para o espaço nulo: $\{(1,0,0),(0,-2,-1)\}$ Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3)\}$.
d) Possível base para o espaço nulo: $\{(-2,1,0,0,0),(3,0,-2,1,0),(-7,0,4,0,1)\}$. Possível base para o espaço das colunas: $\{(1,2,3),(1,3,4)\}$
e) Possível base para o espaço nulo ($\mathbb{R}^2$): $\{(1,0),(0,1)\}$ (base canónica). Possível base para o espaço das colunas ($\{(0,0,0)\}$): $\{\}$ (por convenção).

2. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,1,1)$.

   Uma possível base é $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

   Verifique que $v = (0,3,3,-1) \in \mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v.

   Uma possível base é $\{(-1,1,1,0),(0,3,3,-1)\}$.

EXERCÍCIO 19.

1. Calcule $\dim S$, com $S =< \{(1,0,1),(1,-1,0),(3,-1,2)\} >$ e $S = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x-2y+z-t=0\}$.

   2 e 3.

2. Para que valores de α a dimensão do subspaço $S =< \{(1,\alpha,-1),(-1,1,1),(\alpha,0,-1)\} >$ é 3?

   $\alpha \neq -1, 1$.

EXERCÍCIOS 20.

1. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

   a) $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$

      Uma possível base é $\{(1,0,2,3),(7,4,-2,1),(5,2,4,1),(3,2,0,1)\}$ e a dimensão é 4.

b) $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0),(5,6,2,0)\}$
Uma possível base é $\{(1,3,2,-1),(2,0,-1,0),(1,1,1,1),(1,2,0,0)\}$ e a dimensão é 4.

2. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4\}.$$

   a) Mostre que V é subespaço vetorial.
   b) Indique uma base de V.
   Uma possível base é $\{(1,1,0,0),(-6,0,2,1)\}$.

3. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:

   a) $V = \{(1,-1),(3,0)\}$
   Sim.
   b) $U = \{(1,1),(0,2),(2,3)\}$
   Não.
   c) $W = \{(1,1),(0,8)\}$.
   Sim.

4. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.

   a) $V = \{(1,1,1),(0,2,3),(1,0,2)\}$
   Sim.
   b) $U = \{(1,0,1),(2,4,8)\}$
   Não.
   c) $W = \{(3,0,1),(1,1,1),(4,1,2)\}$.
   Não.

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha,6,-1)$, $v_2 = (1,\alpha,-1)$ e $v_3 = (2,\alpha,-3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.
   $\alpha \neq -\frac{3}{3}$ e $\alpha \neq 2$.
   b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1,1,2)$ em relação à base correspondente.
   Assumindo $\alpha = 0$ vem $(-1,1,2) = \frac{1}{6}v_1 + \frac{4}{3}v_2 - \frac{7}{6}v_3$.

6. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, $\mathscr{N}(\mathscr{A})$ e $\mathscr{N}(\mathscr{A}^{\mathscr{T}})$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m\times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2

NÃO FAZER!

7. Responda às alíneas seguintes utilizando a informação, respeitante a uma matriz A do tipo $m\times n$, fornecida na tabela seguinte.

	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)	(vi)	(vii)
$m\times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
car(A)	3	2	1	2	2	0	2
car$(A\|b)$	3	3	1	2	3	0	2

NÃO FAZER!

a) Classifique os sistemas lineares $Ax=b$.

b) Indique o número de variáveis livres dos sistemas $Ax=0$.

c) Qual é a dimensão de $\mathscr{N}(\mathscr{A})$?

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

Não. Tem que ser uma reta que passa na origem (Porquê?).

9. Seja V o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1),(-3,0,-2)\}.$$

a) Mostre que $V=\mathbb{R}^3$.

b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.

Uma possível base é $\{(1,0,5),(1,1,1),(0,3,1)\}$.

c) Escreva o vetor $(-2,3,4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

$(-2,3,4)=(1,0,5)-3(1,1,1)+2(0,3,1)$.

10. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Resolva o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão do espaço nulo da matriz A.

$\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2x_3 - x_4,\ x_2 = x_3 - 2x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\}$, cuja dimensão é 2 (número de variáveis livres).

b) Mostre que o espaço nulo de A é gerado pelos vetores $(1,2,0,-1)$ e $(-1,3,1,-1)$.

c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A, entao $v + u$ é também solução do sistema.

11. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.

a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) Indique uma base de S.

Uma possível base é $\{(-\frac{1}{2}, 1, 0), (-\frac{1}{2}, 0, 1)\}$.

c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S.

Por exemplo $(0, 1, -1)$.

d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A, então y também pertence ao espaço nulo de B.

12. Considere o sistema $Ax = b$ em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine o conjunto das soluções do sistema $Ax = b$. $\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 1 - \frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{5}{3}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

b) Utilizando a resposta da alínea anterior, indique o espaço nulo de A. Interprete geometricamente o resultado obtido.

$\{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{1}{3}x_3,\ x_2 = -\frac{5}{3}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$.

13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base $\mathcal{N}(\mathcal{A})$.

$\{(3, 1)\}$.

b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.

$(1, 0)$.

c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathcal{N}(\mathscr{A})$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$.

d) Interprete geometricamente os resultados obtidos nas alíneas anteriores e conclua que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 21.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [\, v_1 \,|\, v_2 \,|\, v_3 \,]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   $\mathscr{C}(A) = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) : b_2 = 2b_3 - 3b_1,\ b_1 \in \mathbb{R}, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$. Trata-se de um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem.

   (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{v_1, v_2, v_3\}$ e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$ é 3.

   (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathscr{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathscr{C}(A)$ indicada em b).
   $y = 0v_1 - 2v_2 + v_3$.

   (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathscr{C}(A)$.
   Por exemplo $(1,0,0,0)$ (Justifique!)

   (e) Indique $\dim \mathcal{N}(A)$.
   $\dim(\mathcal{N}(A)) = 0$.

   (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathscr{C}(A)$? Justifique.
   Não! Todas as bases para $\mathscr{C}(A)$ possuem 3 vetores.

   (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.
   Determinado.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine $\mathcal{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.
   $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_2 + x_3,\ x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ Define o plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém as direções $(-1,1,0)$ e $(1,0,1)$.

   (b) Indique uma base para $\mathscr{C}(A)$.
   Uma possível base é $\{(1,-1,2)\}$.

(c) Indique $\text{car}(A)$.

$\text{car}(A) = \dim \mathscr{C}(A) = 1.$

(d) Mostre que $\mathscr{N}(A) = \langle(-1,1,0),(1,0,1)\rangle$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [\, u_1 \,|\, u_2 \,|\, u_3 \,]$.

(a) Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação de linear de u_1, u_2 e u_3?

$\alpha = -2$ e $\alpha = 1$.

(b) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3.

Uma possível base para $\mathbb{R}^3$ é $\{(1,0,1),(0,1,1),(0,0,2)\}$.

4. Considere $V = \langle(1,1,0),(-1,1,1),(1,3,1)\rangle$.

(a) Indique $\dim V$.

$\dim(V) = 2$.

(b) Mostre que $(2,4,1) \in V$.

(c) Indique uma matriz A tal que $\mathscr{C}(A) = V$.

Por exemplo, $A = [v_1\ v_2]$ onde $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (-1,1,1)$ (indique outra possível matriz).

5. Considere os vetores $u = (1,2,1)$ e $v = (0,3,1)$.

(a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v\rangle = \langle w, z\rangle$.

Por exemplo, $z = u - v$ e $w = u + v$.

(b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathscr{C}(A) = \langle u, v\rangle$.

(c) Determine $\mathscr{N}(A)$.

$\mathscr{N}(A) = \langle(-1,-1,1)\rangle$ para a matriz indicada em b).

6. Sejam $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (2,-1,0)$ e $v_4 = (1,1,0)$.

(a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?

Não (4 vetores de $\mathbb{R}^3$ são sempre l.d.)

(b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \mathbb{R}^3$?

Sim.

(c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$\{v_1, v_2, v_4\}$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = x_3\}$

   (a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analitica e geometricamente.

   $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_3,\ x_2 = -\frac{1}{2}x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{N}(A)$ define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem e contém a direção $(1, -\frac{1}{2}, 1)$.

   (b) Indique uma base e a dimensão de V.

   $\dim(V) = 2$ e uma possível base para V é $\{(0,1,1,0), (-1,0,0,1)\}$.

   (c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.

   Uma possível forma é verificar que $\mathcal{C}(A) \subset V$ e que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim V$...

Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

EXERCÍCIO 22. Mostre que o vetor $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

EXERCÍCIOS 23.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Designando por A a matriz em cada uma das alíneas tem-se:
a) $\mathscr{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2) : x_1 = 2\,x_2,\ x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle (2,1) \rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa na origem, com vetor diretor $(2,1)$.
b) $\mathscr{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2\,x_3,\ x_2 = -\frac{3}{2}\,x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} = \langle (-4,-3,2) \rangle$ que define a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem, com vetor diretor $(-4,-3,2)$.
c) $\mathscr{C}(A)^\perp = (\mathbb{R}^3)^\perp = \{\vec{0}\}$.
d) $\mathscr{C}(A)^\perp = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 \in \mathbb{R},\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1) \rangle$ que define o hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na

origem e contém as direções $(-2,1,0,0)$, $(-3,0,1,0)$ e $(-4,0,0,1)$.
e) $\mathscr{C}(A)^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 = -3\,x_3 + 3\,x_4,\ x_2 = -2\,x_3 + 2\,x_4,\ x_3 \in \mathbb{R},\ x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle(-3,-2,1,0),(3,2,0,1)\rangle$ que define o plano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem e contém as direções $(-3,-2,1,0)$ e $(3,2,0,1)$.
(Obs: a interpretação geométrica não era pedida no exercício.)

2. Verifique que o vetor $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual é o complemento ortogonal de $\mathscr{C}(A)$?

$\mathscr{C}(A)^{\perp} = \langle(-4,-2,1)\rangle$.

3. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados por $\{(1,2,2,1),(1,0,2,0)\}$ e por $\{(1,1,2,-1)\}$.

$\langle(1,2,2,1),(1,0,2,0)\rangle^{\perp} = \langle(-2,0,1,0),(0,-1,0,2)\rangle$
$\langle(1,1,2,-1)\rangle^{\perp} = \langle(-1,1,0,0),(-2,0,1,0),(1,0,0,1)\rangle$.

4. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal para cada um dos seguintes subespaços.

   a) $<\{(1,1)\}>$ b) $<\{(1,1,3),(1,1,2)\}>$ c) $<\{(1,1,0,0),(0,2,4,5)\}>$
   d) $<\{(2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1)\}>$.

a) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1)\}$.
b) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(-1,1,0)\}$.
c) A dimensão é 2 e uma possível base é $\{(2,-2,1,0),(5,-5,0,2)\}$.
d) A dimensão é 1 e uma possível base é $\{(0,-1,2,4)\}$.

5. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua vetores do subespaço gerado por $\{(1,1,3),(1,1,2)\}$ e do seu complemento ortogonal.

Uma possível base é $\{(1,1,3),(1,1,2),(-1,1,0)\}$.

6. Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *ortogonal* se as colunas são unitárias e quaisquer duas colunas distintas são ortogonais. Prove os seguintes resultados.

   a) A matriz A é ortogonal sse $A^{-1} = A^{\top}$.
   Sugestão: prove que $A^T A = I$ se só se A é ortogonal.
   b) Se a matriz A é ortogonal, então é simétrica sse $A^2 = I$.

EXERCÍCIO 24. Determine a projeção do vetor $(4,-1,1)$ sobre $V = <\{(1,0,1),(1,1,0)\}>$.
$\mathrm{proj}_V((4,-1,1)) = \left(\frac{8}{3},\frac{1}{3},\frac{7}{3}\right)$.

EXERCÍCIOS 25.

1. Determine a projeção do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.

   $\text{proj}_{(3,1)}((2,3)) = \left(\frac{27}{10}, \frac{9}{10}\right)$.

2. Determine a projeção do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$.

   $\text{proj}_{\langle(1,-1.3)\rangle}((6,5,4)) = \left(\frac{13}{11}, -\frac{13}{11}, \frac{39}{11}\right)$.

3. Identifique o vetor do subespaço vetorial $<\{(1,0,1),(1,1,0)\}>$ a menor distância do vetor $(1,2,3)$.

   O vetor a menor distância é o vetor $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

4. Considere o vetor $b = (1,1,1)$ e os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$.

$$V =< \{(1,0,1),(0,1,1)\} > \quad \text{e} \quad U = \{(x,y,z) : x+y+z=0\}.$$

   a) Determine a projeção ortogonal de b sobre o vetor (1,0,1).

      $\text{proj}_{(1,0,1)}((1,1,1)) = (1,0,1)$.

   b) Determine as projeções ortogonais de b sobre V, U, $V^{\perp}$ e $U^{\perp}$.

      $\text{proj}_V(b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.
      $\text{proj}_{V^{\perp}}(b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
      $\text{proj}_U(b) = (0,0,0)$.
      $\text{proj}_{U^{\perp}}(b) = (1,1,1)$.

   c) Calcule as distâncias de b a V e a U.

      $d(b,V) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $d(b,U) = \sqrt{3}$.

5. Determine a projeção do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.

   $\text{proj}_{\langle(1,1,0,2),(-1,0,0,1)\rangle}((0,2,5,-1)) = \left(\frac{7}{11}, \frac{1}{11}, 0, -\frac{4}{11}\right)$.

6. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1+x_2-x_3+x_4=0,\ x_2-x_3=0\}$$

   e o vetor $v = (2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.

   $\text{proj}_U((2,1,0,1)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\text{proj}_{U^{\perp}}((2,1,0,1)) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

7. Defina a matriz de projeção sobre o plano de equação $x+2y+3z=0$.

$$P = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Considere o vetor $w = (1,-2,2,2)$ e o subespaço $V =< \{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\} >$.

a) Defina a matriz de projeção sobre o subespaço V.

$$P = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 12 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \\ 4 & -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Determine a projeção de w sobre V.

$\text{proj}_V(w) = (1, -2, 2, 2)$.

9. Verifique que $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W = \{(x, y, z, t) : x = y, z = t\}$.

10. Sejam A uma matriz do tipo $m \times n$, com característica n e $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.

a) $P^\top = P$.

b) $P^2 = P$.

11. Considere os vetores $u = (1, -1, 0, 1)$, $v = (0, 1, 0, 1)$ e $b = (2, -1, 0, 1)$.

a) Calcule o ângulo definido pelos vetores u e v.

$\frac{\pi}{2}$.

b) Determine a projeção ortogonal do vetor b sobre o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores u e v.

$\text{proj}_{\langle u,v\rangle}(b) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, 0, \frac{4}{3}\right)$.

12. Considere os vetores $a = (1, -1, 1)$, $b = (-1, 1, 2)$ e $c = (1, 1, 0)$.

a) Mostre que o conjunto $\{a, b, c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

b) Escreva o vetor $(0, 2, 4)$ como combinação linear dos vetores a, b e c. Interprete geometricamente os coeficientes da combinação linear.

$(0, 2, 4) = \frac{2}{3}a + \frac{5}{3}b + c$.

13. a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 0, 1)$.

Uma possível base ortogonal é $\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Tomando os versores dos vetores da base anterior obtém-se a b.o.n, $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),(0,1,0)\right\}$.

14. Seja $V=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 \,:\, x_1+x_2-x_3+x_4=0\}$.

a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.

Uma possível base ortogonal é $\{(-1,1,0,0),(1,1,2,0),(-1,-1,1,3)\}$.

b) Seja $b=(2,1,0,1)$. Calcule a projeção de b sobre o subespaço V.

$\text{proj}_V(b)=(1,0,1,0)$.

Exercícios variados

EXERCÍCIOS 26.

1. Considere $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.

Uma possível base é $\{(1,0,-2),(0,1,6),(2,-1,2)\}$ e dimensão é 3.

(b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.

$\mathbb{R}^3$

(c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?

$\dim \mathscr{N}(A)=0$.

(d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.

$\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b)=\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(b)=b$.

Sugestão: resolva novamente o exercício anterior substituindo a 3ª coluna de A por $(2,1,2)$.

2. Considere $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x=y\}$

(a) Indique uma base e a dimensão de V.

Uma possível base é $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

(b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.

$V^\perp=\langle(1,-1,0)\rangle$ que representa uma reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com a direção do vetor $(1,-1,0)$.

(c) Calcule a matriz de projeção sobre V.

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que $b \notin \mathscr{C}(A)$.

   Verifique que $[A|p]$ é impossível...

   (b) Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas, as seguintes afirmações:

   i. $\dim \mathscr{C}^{\perp}(A) = 1$.

   Verdadeira.

   ii. $\mathscr{N}^{\perp}(A) = \mathbb{R}^2$.

   Verdadeira.

   iii. O vector de $\mathscr{C}(A)$ à menor distância de b é o vetor $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

   Verdadeira.

   Sugestão: por definição de projeção ortogonal basta mostrar que o vetor $p = (\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ verifica as seguintes condições:

   - $p \in \mathscr{C}(A)$...
   - $(b - p) \in \mathscr{C}(A)^{\perp} = \mathscr{N}(A^T)$...

4. Considere $W = \langle (1,1,1,-1), (0,1,2,-1) \rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.

   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^{\perp}$.

   Uma possível base é $\{(1,-2,1,0), (0,1,0,1)\}$ e a dimensão é 2.

   (b) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

   Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1,-1), (-1,0,1,0), (1,-2,1,0), (1,1,1,3)\}$.

   (c) Calcule $\text{proj}_{W^{\perp}}(b)$.

   $\text{proj}_{W^{\perp}}(b) = (2,-1,2,3)$.

   (d) Calcule as distâncias de b a W e $W^{\perp}$.

   $d(b, W) = \sqrt{18}$, $d(b, W^{\perp}) = \sqrt{8}$.

5. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.

   (a) Qual a característica de A?

   $\text{car}(A) = 3$.

   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.

   $\mathscr{N}(A) = \langle (2,3,1,0) \rangle$.

(c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathcal{N}(A)$.

(d) Calcule a distância de $b=(0,2,1,0)$ a $\mathcal{N}(A)$.
$\|(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

6. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

(a) $\langle(1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,1),(1,0,-1),(-1,2,-1)\}$.

(b) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$.

(c) $\{(x,y,z): x+y=0,\ y+z=0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,-1,1)\}$.

(d) $\{(x,y,z,w): x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3)\}$.

7. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais

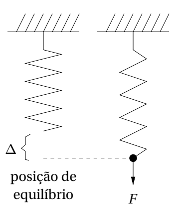
(a) $\langle(1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$
Uma possível base ortogonal é $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),(-1,0,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

(b) $\{(x,y,z,w): x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$
Uma possível base ortogonal é $\{(-1,-2,1,0),(-1,1,1,3),(1,0,1,0),(1,-1,-1,1)\}$.

8. Considere $v_1=(1,0,1,0)$, $v_2=(1,1,1,1)$, $v_3=(1,-1,1,-1)$, $A=[\,v_1\ \ v_2\ \ v_3\,]$ e $b=(1,2,3,4)$. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax=b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax=b$ no sentido usual ?

Esta alínea não é para responder!

9. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F=k\,x$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - k x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k x_6)^2.$$

Interprete geometricamente o resultado obtido.

Esta alínea não é para responder!

Capítulo 4

Determinantes

EXERCÍCIOS 27. Prove os seguintes resultados.

1. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da diagonal principal.

2. Uma matriz com uma linha ou uma coluna de zeros tem determinante igual a zero.

3. É nulo o determinante de uma matriz com linhas proporcionais.

EXERCÍCIOS 28.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes indicando se é invertível.

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) 1 **b)** 18 **c)** -9 **d)** 11 **e)** 65 **f)** 42

Capítulo 5

Valores e vetores próprios

EXERCÍCIOS 29.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

   a) Verifique que $(1,5,10)$ é vetor próprio.

      De facto, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ (com valor próprio $\lambda = 6$).

   b) Verifique que 1 é valor próprio.

      De facto, $p_A(1) = \det(A - I) = 0$ pois tem uma coluna de zeros.

2. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e determine os vetores próprios associados a -1.

   De facto, $p_A(-1) = \det(A - (-1)I) = \det(A + I) = 0$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os múltiplos não nulos do vetor $(0,1,1)$.

3. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

   $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do subespaço próprio $E(\lambda)$ associado a um valor próprio λ é $m.g.(\lambda)$ e os vetores próprios associados a λ são os vetores não nulos de $E(\lambda)$, isto é, os vetores não nulos dos espaços gerados pelas respectivas bases, indicadas a seguir:

A:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	1	1	$\{(-1,1)\}$
2	1	1	$\{(1,0)\}$

B:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$-i$	1	1	$\{(-i,1)\}$
i	1	1	$\{(i,1)\}$

C:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	3	1	$\{(0,0,1)\}$

D:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(1,0,0)\}$
6	1	1	$\{(1,5,10)\}$

E:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$1-2\sqrt{2}$	1	1	$\{(\sqrt{2},-1,1)\}$
1	1	1	$\{(0,1,1)\}$
$1+2\sqrt{2}$	1	1	$\{(-\sqrt{2},-1,1)\}$

F:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
2	2	2	$\{(-1,1,0),(0,0,1)\}$
4	1	1	$\{(1,1,0)\}$

G:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-2	1	1	$\{(0,0,1,0)\}$
1	2	1	$\{(1,0,0,0)\}$
2	1	1	$\{(0,0,0,1)\}$

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

   a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

      $a = 1$

   b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

      Para $a = 1$ os valores próprios de A são $\lambda = 0$ com $m.a.(0) = 1$ e $\lambda = 2$ com $m.a.(2) = 2$. Os vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são os múltiplos não nulos de $(-1, 1, 0)$ e vetores próprios associados a $\lambda = 2$ são os múltiplos não nulos de $(0, 1, 1)$.

   c) Discuta, em função do parâmetro a, a invertibilidade da matriz A.

      Para $a \neq 1$ é invertível e para $a = 1$ é singular

5. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A.

   a) Mostre que, para todo o real α, v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado.

      O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

   b) Mostre que, para todo o inteiro n, v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

      O valor próprio associado é λ^n.

EXERCÍCIOS 30.

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

      Admite os valores próprios 0 e 1 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respectivamente.

   b) Indique um vetor próprio de A.

      Por exemplo, $(1, 0, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

   d) Será que existe uma matriz quadrada P, de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

      Não, porque $m.g.(1) < m.a.(1)$ (verifique).

2. Indique, justificando, quais das seguintes matrizes são diagonalizáveis.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A sim, B sim, C não, D não, E sim, F sim, $G=D$ não H não.

3. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A: $P=\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(-4,1,3)$.

B: $P=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(0,2,2)$.

C: $P=\begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}CP=\mathrm{diag}(-4,1,6)$.

4. Seja $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   a) verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda)=\lambda(1-\lambda)(\lambda-\frac{1}{4})$.

   b) Determine uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

   $P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

a) Indique uma matriz de diagonalização.

$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(-\frac{1}{5}, 1)$.

b) Prove que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

6. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(0, 3)$.

b) Se $b = 2$, para que valores de a é A ortogonalmente diagonalizável?

$a = 1$

c) Se $b = 2$, existirá algum $a > 0$ tal que $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e A sejam semelhantes? Justifique.

Não, porque não têm o mesmo traço. Duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinómio característico, e logo possuem os mesmos valores próprios, e portanto o mesmo determinante (= produto dos valores pp contando com multiplicidades) e o mesmo traço (=soma dos valores pp contando com multiplicidades).

7. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1, com de multiplicidade algébrica 2 e $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ vetores próprios associados a 1.

a) Justifique que A é diagonalizável.

b) Determine $E(1)$.

$E(1) = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle$.

c) Sabendo que $(-1, 1, 0)$ é um vetor próprio de A associado a 2, determine a matriz A.

$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Indique uma matriz ortogonal de diagonalização da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, tendo-se $P^T AP = \text{diag}(2, 2, 8)$.

9. Prove os seguintes resultados.

   a) Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.

   b) Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ, então λ tem o sinal de $v^T A v$.

Capítulo 6

Introdução à programação linear

EXERCÍCIO 31. Considere o problema de problema de programação linear,

$$\begin{array}{lrcl} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 3x_2 & \leq & 24 \\ & x_1 + \ \ x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 \qquad & \leq & 8 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Represente geometricamente a região admissível.

   Nota: A região admissível do problema é o polígono de vértices $(0,0)$, $(8,0)$, $(8,2)$, $(3,7)$ e $(0,8)$.

b) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e identifique as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdades).

   Solução: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ é a única solução óptima e o correspondente valor da função objectivo é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

c) Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém óptima a solução que referiu na alínea b).

   Solução: $[3, +\infty[$.

d) Dê exemplo de uma outra função objectivo relativamente para a qual se mantenha óptima a solução que indicou na alínea b).

   Solução: por exemplo, $z = x_1 + 3x_2$.

EXERCÍCIOS 32.

1. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de

20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 Euros por cada hectare de terreno destinado a área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende determinar-se o número de hectares a destinar a cada tipo de ocupação de solo de forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução:
$$\begin{array}{ll} \max & 40x+80y+60z \\ \text{s.a} & x+y+z\leq 100 \\ & x+3y+4z\leq 300 \\ & x+1.5y+5z\leq 200 \\ & x,y,z\geq 0 \end{array}$$
em que x, y e z representam, respectivamente, os hectares destinados à área florestal, à reserva de caça e ao parque de campismo.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e indique uma solução básica admissível.

Solução:
$$\begin{array}{ll} \max & 40x+80y+60z \\ \text{s.a} & x+y+z+x'=100 \\ & x+3y+4z+y'=300 \\ & x+1.5y+5z+z'=200 \\ & x,y,z,x',y',z'\geq 0; \end{array}$$
$x=y=z=0$ e $x'=100, y'=300, z'=200$ é solução básica admissível.

c) Determine uma solução que maximize o lucro quando 40 ha de terreno são destinados a reserva de caça.

Solução: utilizar 40 ha do terreno para floresta e ocupar 20 ha para parque de campismo, proporciona um lucro máximo de 6000 Euros.

2. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quénia e Jamaica, que dispõe em armazém, para fazer dois lotes de café A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quénia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta. Formule o problema em termos de programação linear.

Solução: sejam x_1 e x_2 as variáveis que representam a quantidade, em Kg, de café de lote A e B, respectivamente. O problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{lrl} \max & 3.5x_1 + 5.0x_2 & \\ \text{s.a} & 0.25x_1 + 0.25x_2 & \leq 100 \\ & 0.75x_1 + 0.25x_2 & \leq 150 \\ & 0.5x_2 & \leq 175 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Devem ser produzidos 50 Kg de café do lote A e 350 Kg de café do lote B, que originam uma receita bruta máxima de 1925 Euros.

3. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m^2 a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m^2 a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil€. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

Solução:
$$\begin{array}{lrl} \min & 10x_h + 7x_A & \\ \text{s.a} & 9x_h + 18x_A & \geq 72 \quad (P) \\ & 10x_h + 10x_A & \geq 50 \quad (O) \\ & 12x_h + 4x_A & \geq 24 \quad (H) \\ & x_h, x_A & \geq 0 \end{array}$$
em que x_h e x_A são, respectivamente, o número de m a aumentar a altura da chaminé e o número de m^2 a aumentar a área dos filtros.

b) Represente graficamente a região admissível.

Nota: a região admissível é o polígono de vértices $A = (0,6)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $C = (2,3)$ e $D = (8,0)$.

c) Determine a solução óptima e a correspondente solução básica admissível. Qual é o custo que corresponde a esta solução?

Solução: a opção definida pelo vértice $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, que consiste em aumentar 1/2 m a altura da chaminé e 9/2 m^2 a área dos filtros, tem um custo mínimo de 36500€. A correspondente solução básica admissível é

$$(x_h, x_A, d_P, d_O, d_H) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 0, 0\right),$$

em que d_P, d_O, d_H são as variáveis de folga associadas às restrições (P),(O) e (H), respectivamente.

4. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3, permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3, permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3. Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

a) Formule linearmente o problema, indicando os signicado das variáveis intervenientes.

Solução: sejam x_1 e x_2 as variáveis que representam a quantidade a transportar, em toneladas, dos produtos P1 e P2, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{lrl} \max & 2000x_1 + 3000x_2 & \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 & \leq 1.5 \\ & 0.5x_1 + 2x_2 & \leq 1 \\ & 1.5x_1 + 4x_2 & \geq 2.5 \\ & x_1, x_2 & \geq 0. \end{array}$$

b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

Solução: a solução indicada satisfaz todas as restrições funcionais e de sinal (verifique), permitindo combater uma área de 2.5 ha.

5. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m^2 para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m^2, sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução:
$$\begin{array}{ll} \max & 200a+300b+400c+700d \\ \text{s.a} & a+4b+c+2d \le 10 \\ & 15a+16b+20c+30d \le 150 \\ & a \ge 2 \\ & a,b,c,d \ge 0 \end{array}$$

em que a, b, c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respectivamente, a armazenar.

b) Converta à forma *standard* a formulação anterior e atribua significado às variáveis de folga.

Solução:
$$\begin{array}{ll} \max & 200a+300b+400c+700d \\ \text{s.a} & a+4b+c+2d+t=10 \\ & 15a+16b+20c+30d+e=150 \\ & a-a'=2 \\ & a,b,c,d,t,e,a' \ge 0 \end{array}$$

As variáveis de folga t, e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

Solução: para $a=2, b=0, c=3, d=2$ tem-se
$$\begin{array}{rl} a+4b+c+2d=9 & \le 10 \\ 15a+16b+20c+30d=150 & \le 150 \\ a=2 & \ge 2 \\ a,b,c,d & \ge 0 \end{array}$$

que mostra que $(2,0,3,2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a=2, b=0, c=3, d=2, t=1, e=0, a'=0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2,0,3,2,1,0,0)$ não é sba e portanto que $(2,0,3,2)$ não é vértice.

6. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

   A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

   A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

   a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.
   Solução:

$$\begin{array}{lll} \max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} & \\ \text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3} & \leq 60 \\ & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3} & \leq 30 \\ & x_{A1}+x_{B1} & = 20 \\ & x_{A2}+x_{B2} & \geq 50 \\ & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} & \geq 0 \end{array}$$

   em que x_{Ki} é a quantidade, em toneladas, de mercadoria a ser transportada do armazém K $(K=A,B)$ para o cliente i $(i=1,2,3)$.

   b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

	Cliente		
Armazém	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

Solução: a opção $x_{A1} = 20$, $x_{A2} = 40$, $x_{A3} = 0$, $x_{B1} = 0$, $x_{B2} = 10$, $x_{B3} = 20$ é solução admissível pois satisfaz todas as restrições da formulação da alínea a). O lucro resultante desta opção é 600 dezenas de euros.

c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.
Solução:

$$\begin{array}{rll} \max & 8x_{A1}+5x_{A2}+7x_{A3}+6x_{B1}+4x_{B2}+10x_{B3} & \\ \text{s.a} & x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+F_1 & =60 \\ & x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+F_2 & =30 \\ & x_{A1}+x_{B1} & =20 \\ & x_{A2}+x_{B2}-F_3 & =50 \\ & x_{A1},x_{A2},x_{A3},x_{B1},x_{B2},x_{B3},F_1,F_2,F_3 & \geq 0 \end{array}$$

d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível.
Solução: o sistema de equações que definem a região admissível do problema na forma *standard* é representado pela seguinte matriz ampliada

$$\begin{array}{ccccccccc|c} x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & F_1 & F_2 & F_3 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \end{array}$$

À solução $x_{A1} = 20$, $x_{A2} = 40$, $x_{A3} = 0$, $x_{B1} = 0$, $x_{B2} = 10$, $x_{B3} = 20$ correspondem os valores das variáveis de folga $F_1 = F_2 = F_3 = 0$. A submatriz das colunas associadas às 4 variáveis não nulas da solução anterior é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det M \neq 0$ (verifique), a solução admissível $(20, 40, 0, 0, 10, 20, 0, 0, 0)$ é também básica e portanto $(20, 40, 0, 0, 10, 20)$ é um vértice do poliedro definido pelas restrições da alínea a).

7. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2, dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12 € e 8 € e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

Solução:
$$\begin{array}{lll} \max & 12p_1+8p_2 & \\ \text{s.a} & 5p_1+2p_2 & \le 80 \\ & p_2 & \le 30 \\ & p_1, p_2 & \ge 0 \end{array}$$
em que p_1 e p_2 são, respectivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

b) Represente graficamente a região admissível.

Nota: a região admissível é região de vértices $A=(0,0)$, $B=(0,30)$, $C=(4,30)$ e $D=(16,0)$.

c) Identifique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: C, que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2, é solução óptima. A solução básica admissível correspondente é $(4,30,0,0)$.

d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter óptima a solução determinada na alínea anterior.

Solução: entre 0 e 20€.

8. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & 2x_1+x_2-x_3+3x_4 \\ \text{com} & (x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathscr{P} \end{array}$$

em que
$$\begin{array}{rrcl} \mathscr{P}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): & x_2-2x_3+x_4 & \ge & 3 \\ & x_1 \quad -2x_3+x_4 & \ge & 2 \\ & x_1 \quad +x_3 \quad & \le & 3 \\ & x_1+x_2-2x_3+x_4 & = & 5 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4 & \ge & 0\}. \end{array}$$

a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathscr{F}\subset\mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

Solução:

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{l}{\mathscr{F}=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7):} \\ x_2-2x_3+x_4-x_5 & = & 3 \\ x_1 \quad -2x_3+x_4 \quad -x_6 & = & 2 \\ x_1 \quad +x_3 \quad +x_7 & = & 3 \\ x_1+x_2-2x_3+x_4 & = & 5 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7 & \ge & 0\}. \end{array}$$

b) Verifique que $v = (2,3,0,0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ e indique o valor da função objectivo em v.

Solução: Para vermos que $v = (2,3,0,0)$ é vértice de $\mathscr{P}$ temos que ver que o ponto de $\mathscr{F}$ que lhe corresponde, $\bar{v} = (2,3,0,0,0,0,1)$, é solução básica admissível. Ora $\bar{v}$ é admissível pois as suas componentes são não negativas. Além disso, como a matriz dos coeficientes do sistema de equações que define $\mathscr{F}$ tem característica igual a 4 e o conjunto das colunas da matriz desse sistema que correspondem às componentes não nulas de $\bar{v}$ (colunas 1, 2 e 7) é linearmente independente (verifique), $\bar{v}$ é básica.

O valor da função objectivo correspondente ao vértice v é igual a 7.

9. Considere o problema

$$\begin{array}{rrcr} \text{maximizar} & 20x_1 + 30x_2 & & \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\ & x_1 \qquad & \leq & 60 \\ & x_2 & \leq & 50 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.

b) Indique uma solução óptima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ é a única solução óptima. A solução básica admissível que lhe corresponde é (60,30,0,0,20).

c) Se os coeficientes da função objectivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções óptimas?

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ continuaria a ser a única solução óptima.