Matriz de projeção

Recordemos que no método das equações normais $\text{proj}_V(b) = A\,\bar{x}$ onde A é a matriz de uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V e $\bar{x}$ a solução do sistema das equações normais, $A^T A\,x = A^T b$, isto é, verifica a relação

$$A^T A\,\bar{x} = A^T b.$$

Uma vez que A é a matriz de uma base pode-se mostrar que $A^T A$ é invertível. Multiplicando à esquerda por $(A^T A)^{-1}$ ambos os membros da igualdade anterior conclui-se que $\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ e portanto que

$$\boxed{\text{proj}_V(b) = A\,\bar{x} = A\,(A^T A)^{-1} A^T b = Pb,}$$

com,

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T.$$

A matriz P não depende da escolha da base de V e designa-se por matriz de projeção sobre V, tendo-se portanto $\text{proj}_V(b) = P\,b$ para todo o $b \in \mathbb{R}^m$.

Propriedades da matriz de projeção

- $P^T = P$ (simétrica).
- $P^2 = P$ (idempotente).

(Ver o exercício 25.10 da sebenta).

Matriz de projeção (cont.)

Observações

- Se P é a matriz de projeção sobre $V \subset \mathbb{R}^m$ então $I_m - P$ é a matriz de projeção sobre $V^\perp$, onde I_m denota a matriz identidade de ordem m, tendo-se para todo o $b \in \mathbb{R}^m$,

$$\text{proj}_{V^\perp}(b) = (I - P)b = b - Pb = b - \text{proj}_V(b).$$

- Se $V = \langle v \rangle = \mathcal{C}(v)$, é uma reta a fórmula da matriz de projeção simplifica-se obtendo-se uma expressão muito elegante:

$$P = v(v^T v)^{-1} v^T = (v^T v)^{-1} v v^T = \frac{v v^T}{v^T v},$$

ou seja, a matriz de projeção sobre a reta $\langle v \rangle$ é, $P = \dfrac{v\,v^T}{v^T\,v}$.

Exercício na aula

Determinar as matrizes de projeção sobre V e $V^\perp$ onde $V = \langle (1,0,1), (1,1,2) \rangle$ é o subespaço do slide 140 e calcular $\text{proj}_V(1,0,4)$ e $\text{proj}_{V^\perp}(1,0,4)$

Exercício na aula (resolução)

Mnemónica para calcular a inversa de uma matriz 2×2

"Switch diagonally, negate the wings and divide by a cross" ([13]):

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Note-se que a matriz anterior é invertível se e só se $ad - bc \neq 0$, valor que se designa por determinante da matriz e será estudado a seguir.

- Pelos resultados do slide 141, $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$,

  com A matriz da base de V. Usando a fórmula acima para obter $(A^T A)^{-1}$ vem,

$$\begin{aligned} P &= A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{2 \times 6 - 3 \times 3} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[13] https://www.dam.brown.edu/people/mchb/la/matrix_algebra.pdf

Exercício na aula (resolução - cont.)

- Constata-se imediatamente que a matriz de projeção P sobre V é simétrica, isto é, $P^T = P$. Verifique que P é também idempotente, isto é, que verifica $P^2 = P$.
- A matriz de projeção sobre $V^\perp$ é $I - P$ onde I é a matriz identidade, isto é,

$$I - P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Calculando $V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$, obtém-se $V^\perp = \langle w \rangle$ com $w = (-1, -1, 1)$ (verifique) e portanto a matriz de projeção sobre $V^\perp$ pode ser alternativamente reobtida, usando a fórmula do slide 143, como $\dfrac{w\,w^T}{w^T w}$. De facto,

$$\frac{w\,w^T}{w^T w} = \frac{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}{3}.$$

- Se $b = (1, 0, 4)$ tem-se em particular,

$$\mathrm{proj}_V(b) = Pb = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in V,$$

  e analogamente, $\mathrm{proj}_{V^\perp}(b) = (I - P)b = b - Pb = (-1, -1, 1) \in V^\perp$.

Conjunto ortogonal e ortonormado de vetores

Definição de conjunto ortogonal e ortonormado de vetores

Sejam $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$

- $\{v_1, \dots, v_k\}$ diz-se um conjunto *ortogonal* se os vetores forem 2 a 2 perpendiculares entre si, isto é, se $v_i \cdot v_j = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$
- Se além disso, todos os vetores forem unitários, isto é, $\|v_i\| = 1$, $\forall i$, então $\{v_1, \dots, v_k\}$ diz-se um conjunto *ortonormado*

Exemplos

- $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(0,1,1), (1,2,-2), (4,-1,1)\}$ é um conjunto ortogonal de vetores de $\mathbb{R}^3$.De facto,

$$\begin{aligned} v_1 \cdot v_2 &= (0,1,1) \cdot (1,2,-2) = 0, & \text{isto é,} \quad & v_1 \perp v_2, \\ v_1 \cdot v_3 &= (0,1,1) \cdot (4,-1,1) = 0, & \text{isto é,} \quad & v_1 \perp v_3, \\ v_2 \cdot v_3 &= (1,2,-2) \cdot (4,-1,1) = 0, & \text{isto é,} \quad & v_2 \perp v_3. \end{aligned}$$

  Portanto os vetores são ortogonais 2 a 2.
- A base canónica de $\mathbb{R}^m$ é um conjunto ortonormado (verifique!).

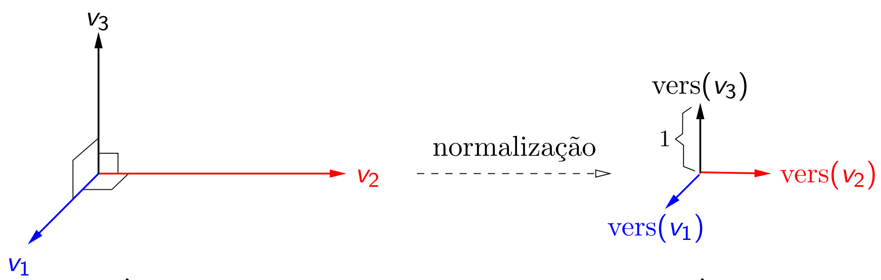
Normalização de vetores...

Observação

Se $\{v_1, \dots, v_k\}$ for um conjunto *ortogonal de vetores não nulos* de $\mathbb{R}^m$, então

$$\{\text{vers}(v_1), \dots, \text{vers}(v_k)\} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right\}$$

é um conjunto ortonormado de vetores de $\mathbb{R}^m$. ([14])



conjunto ortogonal

conjunto ortonormado

[14] O versor de um vetor $x \neq \vec{0}$, $\text{vers}(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$, é o único vetor unitário que tem a mesma direção e sentido que x.

Exemplo de normalização...

Exemplo

Voltando ao conjunto ortogonal $\{(0,1,1),(1,2,-2),(4,-1,1)\}$ do exemplo do slide 144, concluímos que o conjunto de vetores

$$\{\text{vers}(0,1,1), \text{vers}(1,2,-2), \text{vers}(4,-1,1)\} =$$

$$\left\{ \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}, \frac{(1,2,-2)}{3}, \frac{(4,-1,1)}{3\sqrt{2}} \right\}$$

é um conjunto ortonormado de vetores de $\mathbb{R}^3$.

Base ortogonal/ortonormada de um subespaço vetorial

Definição

Uma base ortogonal/ortonormada de um subespaço vetorial V é uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V que é simultaneamente um conjunto ortogonal/ortonormado.

Observações

- Pode-se mostrar que um conjunto ortogonal de vetores não nulos $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é sempre linearmente independente.
- Do ponto anterior resulta imediatamente que um conjunto ortogonal de geradores não nulos de um subespaco vetorial V, isto é, $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, com $v_i \neq \vec{0}$ e $v_i \perp v_j$ se $i \neq j$, define uma base ortogonal de V.
- Em particular, qualquer conjunto ortogonal de m vetores não nulos de $\mathbb{R}^m$, $\{v_1, \ldots, v_m\}$, define uma base ortogonal de $\mathbb{R}^m$.
- A base canónica $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ é o exemplo mais importante de base ortonormada de $\mathbb{R}^m$.
- As bases ortogonais são importante pois vão-nos permitir calcular a projeção ortogonal de forma imediata, como veremos no próximo slide.

Projeção sobre um subespaço vetorial munido de uma base ortogonal

Teorema

Seja $\{v_1, \ldots, v_k\}$ uma base ortogonal de V. Para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ tem-se

$$\text{proj}_V(b) = \text{proj}_{v_1}(b) + \cdots + \text{proj}_{v_k}(b) = \frac{b \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{b \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k$$

Muito importante: o resultado é falso se a base não for ortogonal (!!!)

Exemplo na aula

Calcular $\text{proj}_V(b)$ onde $V = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (0,1,1), (1,2,-2) \rangle$ e $b = (-1,0,4)$.

Como $v_1 \cdot v_2 = 0$ (verifique) $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto ortogonal de geradores não nulos de V e portanto define uma base ortogonal de $V = \langle v_1, v_2 \rangle$, tendo-se

$$\begin{aligned} \text{proj}_V(b) &= \text{proj}_{\langle (0,1,1),(1,2,-2) \rangle}(b) = \text{proj}_{(0,1,1)}(b) + \text{proj}_{(1,2,-2)}(b) \\ &= \tfrac{(-1,0,4)\cdot(0,1,1)}{(0,1,1)\cdot(0,1,1)}(0,1,1) + \tfrac{(-1,0,4)\cdot(1,2,-2)}{(1,2,-2)\cdot(1,2,-2)}(1,2,-2) \\ &= \tfrac{4}{2}(0,1,1) + \tfrac{-9}{9}(1,2,-2) = (-1,0,4). \end{aligned}$$

Note-se que neste exercício $\text{proj}_V(b) = b$. Qual o significado dessa relação?

Vamos ver a seguir como obter bases ortogonais para subespaços vetoriais...