Construção de uma base ortogonal de um subespaço - ideia

Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de V. Em particular, $V = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ e $\dim V = n$. Define-se:

$$v_1 = u_1 \in V$$

$$v_2 = \text{proj}_{\langle v_1 \rangle^\perp}(u_2) = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{v_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 \Rightarrow \begin{cases} v_2 \perp v_1 & \text{(por construção)} \\ v_2 \in V & (v_2 \text{ é CL de } u_1, u_2) \\ v_2 \neq \vec{0} & \text{(senão } u_2 \text{ múltiplo de } u_1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \text{proj}_{\langle v_1, v_2 \rangle^\perp}(u_3) = v_3 - \text{proj}_{\langle v_1, v_2 \rangle}(u_3) \\ &= u_3 - \text{proj}_{v_1}(u_3) - \text{proj}_{v_2}(u_3) = u_3 - \frac{v_1 \cdot u_3}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{v_2 \cdot u_3}{v_2 \cdot v_2} v_2 \Rightarrow \begin{cases} v_3 \perp v_1, v_2 \\ v_3 \in V \\ v_3 \neq \vec{0} \end{cases} . \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} v_n &= \text{proj}_{\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle^\perp}(u_n) = u_n - \text{proj}_{\langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle}(u_n) \\ &= u_n - \text{proj}_{v_1}(u_n) - \text{proj}_{v_2}(u_n) - \cdots - \text{proj}_{v_{n-1}}(u_n) \\ &= u_n - \frac{v_1 \cdot u_n}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \frac{v_2 \cdot u_n}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \cdots - \frac{v_{n-1} \cdot u_n}{v_{n-1} \cdot v_{n-1}} v_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} v_n \perp v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \\ v_n \in V \\ v_n \neq \vec{0} \end{cases} \end{aligned}$$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base ortogonal de V (ver o slide 108) pois pode-se mostrar que:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos logo lin. indep.
- $v_1, \ldots, v_n \in V$.
- $\dim V = n$.

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

A partir da ideia descrita no slide anterior obtém-se o seguinte método para ortogonalizar uma base de um subespaço vetorial.

Algoritmo

`Input:` $\{u_1, \ldots, u_n\}$ base de um subespaço vetorial V.
`Objectivo:` Determinar uma base ortogonal de V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$

- $v_1 = u_1$.
- $v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \dfrac{v_1 \cdot u_2}{v_1 \cdot v_1} v_1$.
- $v_3 = u_3 - \text{proj}_{v_1}(u_3) - \text{proj}_{v_2}(u_3) = u_3 - \dfrac{v_1 \cdot u_3}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dfrac{v_2 \cdot u_3}{v_2 \cdot v_2} v_2$.
- $\vdots$
- $v_n = u_n - \text{proj}_{v_1}(u_n) - \text{proj}_{v_2}(u_n) - \cdots - \text{proj}_{v_{n-1}}(u_n)$
  $= u_n - \dfrac{v_1 \cdot u_n}{v_1 \cdot v_1} v_1 - \dfrac{v_2 \cdot u_n}{v_2 \cdot v_2} v_2 - \cdots - \dfrac{v_{n-1} \cdot u_n}{v_{n-1} \cdot v_{n-1}} v_{n-1}$.

Note-se que no caso em que a base original $\{u_1, \ldots, u_n\}$ já é ortogonal, o método de Gram-Schmidt devolve a própria base!

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observação

- Podemos multiplicar cada vetor v_i da base ortogonal por um escalar não nulo que ainda obtemos uma base ortogonal de V.
- Se tomarmos os versores dos vetores da base ortogonal $v_1, \dots, v_n$, obtemos uma base ortonormada de V, $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_n}{\|v_n\|} \right\}$.

Exercício na aula

- Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\} = \{(1,-1,1), (1,0,1), (1,1,2)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$.
- A partir da base anterior obtenha uma base ortogonal $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ usando o método de Gram-Schmidt.
- Transforme a base anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Exercício na aula (resolução)

$\{u_1, u_2, u_3\}$ define uma base de $\mathbb{R}^3$ pois é um conjunto linearmente independente formado por 3 vetores ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$). De facto, aplicando o método de Gauss,

$$[\, u_1 \quad u_2 \quad u_3 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(escada)}$$

verifica-se que todas as colunas da matriz em escada obtida a partir de $[\, u_1 \quad u_2 \quad u_3 \,]$ têm pivot. No entanto esta base não é ortogonal pois $u_1 \cdot u_2 = 2 \neq 0$ (por exemplo). Aplicando o método de Gram-Schmidt à base anterior obtém-se:

- $v_1 = u_1 = (1,-1,1)$
- $v_2 = u_2 - \text{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (1,0,1) - \frac{(1,0,1)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,-1,1) = \frac{1}{3}(1,2,1) \rightsquigarrow (1,2,1)$
- $v_3 = u_3 - \text{proj}_{v_1}(u_3) - \text{proj}_{v_2}(u_3) = u_3 - \frac{u_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{u_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (1,1,2) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,-1,1)}{(1,-1,1)\cdot(1,-1,1)}(1,-1,1) - \frac{(1,1,2)\cdot(1,2,1)}{(1,2,1)\cdot(1,2,1)}(1,2,1) = (1,1,2) - \frac{2}{3}(1,-1,1) - \frac{5}{6}(1,2,1) = \frac{1}{2}(-1,0,1) \rightsquigarrow (-1,0,1)$

Obteve-se a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,-1,1), (1,2,1), (-1,0,1)\}$.

Normalizando a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ anterior, dividindo cada vetor pela sua norma, obtém-se a base ortonormada de $\mathbb{R}^3$,

$$\{\text{vers}(v_1), \text{vers}(v_2), \text{vers}(v_3)\} = \left\{ \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}, \frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Método de ortogonalização de Gram-Schmidt

Observação

- Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for uma base ortogonal de um subespaço vetorial $V \subset \mathbb{R}^m$ e $\{w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ uma base ortogonal de $V^\perp$ então $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_{m-n}\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^m$.

  Note-se que se tem $v_i \perp w_j$, para todo o i e j, uma vez que por definição $V^\perp$ é constituído pelos vetores que são ortogonais a todos os vetores de V (e vice-versa).

Exercício na aula

- Determinar a projeção ortogonal de $b = (1, 1, 3)$ sobre $V = \langle (1, -1, 1), (1, 0, 1) \rangle$ ortogonalizando uma base de V.
- Estender a base ortogonal de V da alínea anterior a uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ usando a observação acima.

Exercício na aula (resolução)

- Uma base (não ortogonal) de V é $\{u_1, u_2\} = \{(1, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ (justifique!).
- Aplicando o método de Gram-Schmidt à base anterior (ver o slide 154 - os vetores são os mesmos) obtém-se:

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (1, -1, 1) \\ v_2 &= u_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \frac{1}{3}(1, 2, 1) \rightsquigarrow (1, 2, 1) \end{aligned}$$

  Uma base ortogonal de V é portanto $\{v_1, v_2\} = \{(1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$, tendo-se

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_V(b) &= \mathrm{proj}_{v_1}(b) + \mathrm{proj}_{v_2}(b) = \frac{v_1 \cdot b}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v_2 \cdot b}{v_2 \cdot v_2} v_2 \\ &= \frac{3}{3}(1, -1, 1) + \frac{6}{6}(1, 2, 1) = (2, 1, 2). \end{aligned}$$

- Calculando $V^\perp = \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$ com $A = [\, u_1 \;\; u_2 \,]$ (também se pode considerar $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$), obtém-se $V^\perp = \langle (-1, 0, 1) \rangle$.

  Tem-se portanto a base ortogonal([15]) $\{w\} = \{(-1, 0, 1)\}$ de $V^\perp$.
- Reunindo a base ortogonal de V com a base ortogonal de $V^\perp$ obtém-se a base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que estende a base ortogonal de V,

$$\{v_1, v_2, w\} = \{(1, -1, 1), (1, 2, 1), (-1, 0, 1)\}.$$

[15] Uma base de um subespaço vetorial de dimensão um é sempre ortogonal.