Conceito de determinante

- Seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots v_n \,]$ matriz quadrada de ordem n. Vamos associar a A um valor real, designado por *determinante de A* e denotado por $\det A$ ou por $|A|$, verificando certas propriedades, entre as quais a propriedade

$$\boxed{A \text{ é invertível} \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0}$$

Note-se que $A_{n\times n} = [\, v_1 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$ é invertível se e só se $\mathrm{car}(A) = n$ e só se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, ou seja, define uma base de $\mathbb{R}^n$.

  - Se $n = 1$, define-se,

$$\det [a] = a$$

  - Se $n = 2$, define-se

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

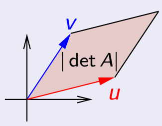
Determinante de matrizes 2×2

- Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2 \neq 0$$

- Note-se que A é invertível uma vez que as colunas de A são vetores linearmente independentes e portanto $\mathrm{car}(A) = 2$.

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 2×2



O valor absoluto do determinante de uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\, u \;\; v \,], \text{ com } u = (a, c) \text{ e } v = (b, d),$$

corresponde à área do paralelogramo definido por u e v.
Note-se que a área do paralelogramo é não nula se e só se os vetores u e v são não colineares, isto é, A é invertível!

Determinante de matrizes 3×3: regra de Sarrus

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$= {\color{red} aei + bfg + cdh} - ({\color{blue} ceg + afh + bdi})$$

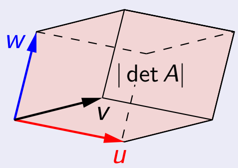
Por exemplo,

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = {\color{red} 1 \times 1 \times 1 + 0 \times 1 \times (-1) + (-2) \times 2 \times 3}$$
$$- ({\color{blue} (-2) \times 1 \times (-1) + 1 \times 1 \times 3 + 0 \times 2 \times 1}) = {\color{red} 1 + 0 - 12} - ({\color{blue} 2 + 3 + 0}) = -16 \neq 0$$

Logo, A é invertível, isto é, as colunas de A são linearmente independentes e portanto definem uma base de $\mathbb{R}^3$.

Determinantes 3x3 (cont.)

Interpretação geométrica do determinante de matrizes 3×3



O O valor absoluto do determinante de uma matriz $A = [\, u \;\; v \;\; w \,]_{3 \times 3}$ com $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ corresponde ao volume do paralelipípedo definido por u, v e w.

Note-se que o volume do paralelipípedo é não nulo se e só se o paralelipípedo é não degenerado se e só se u, v, w são não complanares, ou seja, se e só se $\{u, v, w\}$ é linearmente independente, isto é, A é invertível

- Por exemplo, o paralelipípedo definido pelas 3 colunas da matriz A do slide anterior tem volume 16
- A regra de Sarrus só se aplica às matrizes 3x3 (!)
- *E o caso das matrizes $n \times n$ com $n \geq 4$?*

Menores e co-factores

Definições de menor complementar e co-factor

Sejam A uma matriz quadrada de ordem n e $1 \leq i, j \leq n$

- Chama-se *menor complementar da entrada* (i, j), denotado por A_{ij}, ao determinante da submatriz que se obtém eliminando a linha i e coluna j de A
- Chama-se *complemento algébrico ou co-factor da entrada* (i, j) a
$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

Por exemplo, o menor complementar da entrada $(1, 2)$ de $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, é o determinante da submatriz que se obtém eliminando a linha 1 e coluna 2 de A, isto é,

$$A_{12} = \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \times 1 - 3 \times (-1) = 3$$

e o co-factor da entrada $(1, 2)$ é $\Delta_{12} = (-1)^{1+2} A_{12} = (-1) \times 3 = -3$

Regra de Laplace

Teorema de Laplace

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. Então

- Para qualquer $i = 1, \ldots, n$, tem-se
$$\det A = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$
(expansão do det. ao longo da linha i)
- Para qualquer $j = 1, \ldots, n$, tem-se
$$\det A = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$
(expansão do det. ao longo da coluna j)

- A regra de Laplace reduz o cálculo do determinante de uma matriz $n \times n$ ao cálculo de n determinantes de matrizes $(n-1) \times (n-1)$
- Devem escolher-se linhas ou colunas com o maior número possível de zeros
- O resultado não depende da escolha da linha ou da coluna

Regra de Laplace: exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- Ao longo da 2ª linha tem-se

$$\begin{aligned} \det A &= a_{21}\Delta_{21} + a_{22}\Delta_{22} + a_{23}\Delta_{23} = 0(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \quad 2(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 3(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 2 \times (1+3) - 3 \times 0 = 8 \end{aligned}$$

- Ao longo da 1ª coluna tem-se

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\Delta_{11} + a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\Delta_{31} = 1(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \quad 0(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1)(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= 1 \times (2-6) + 0 + (-1) \times (-6-6) = 8 \end{aligned}$$