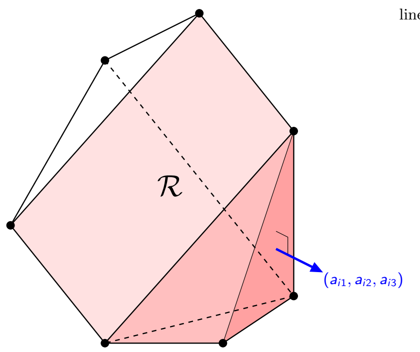
Formulação de um problema de PL: caso geral

- Num problema de PL, pretende-se determinar o(s) valor(es) de um conjunto de variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ que otimizam (maximizam ou minimizam), uma função linear z designada por função objetivo (f.o.), satisfazendo um conjunto de restrições funcionais (restrições lineares) (1),..., (m) e de sinal (m+1):

$$
\begin{array}{lll}
\text{max ou min} & z = c_1\, x_1 + c_2\, x_2 + \cdots + c_k\, x_k & \text{(f.o.)} \\
s.a & a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1k}\, x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_1 & (1) \\
 & a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2k}\, x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_2 & (2) \\
 & \vdots & \\
 & a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mk}\, x_k \geq, \leq \text{ ou } = b_m & (m) \\
 & x_1 \geq 0, \leq 0 \text{ ou livre}, \ldots, x_k \geq 0, \leq 0 \text{ ou livre} & (m+1)
\end{array}
$$

- c_j, a_{ij} e b_i, com $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, k$, são os parâmetros do problema.
- O conjunto de pontos que satisfazem as restrições funcionais (1),..., (m) e as restrições de sinal (m+1) designa-se por região admissível do problema, denotada $\mathcal{R}$ e define um poliedro de $\mathbb{R}^k$ chamado poliedro de admissibilidade.
- Cada ponto da região admissível $\mathcal{R}$ designa-se por solução admissível.
- Uma solução admissível que otimize (maximize ou minimize) a f.o. designa-se por solução ótima.
- A cada restrição linear do tipo $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \ldots + a_{ik}\, x_k \leq (\geq)\, b_i$ associamos a equação linear $a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots + a_{ik}\, x_k = b_i$ que se designa por **hiperplano de suporte** da região admissível $\mathcal{R}$ se intersetar a fronteira de $\mathcal{R}$.

Poliedros e combinações convexas



Exemplo de um POLIEDRO DE ADMISSIBILIDADE em $\mathbb{R}^3$ (problema de PL com 3 variáveis de decisão), obtido como interseção de 7 semi-espaços em $\mathbb{R}^3$ definidos por 7 restrições lineares do tipo

$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 \geq \text{ ou } \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, 7.$

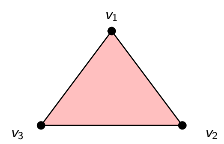
Os 7 (hiper)planos de suporte que contêm as 7 facetas do poliedro são definidos pelas equações lineares

$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 = b_i, \quad i = 1, \ldots, 7,$

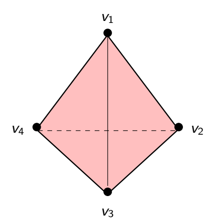
com cada vetor (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) normal a uma faceta do poliedro.

Uma COMBINAÇÃO CONVEXA de $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear da forma $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$ com $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 0$ e $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Cada ponto do segmento de reta é uma combinação convexa de v_1 e v_2.



Cada ponto do polígono (triângulo) é uma combinação convexa de v_1, v_2 e v_3.



Cada ponto do poliedro (tetraedro) é uma combinação convexa de v_1, v_2, v_3 e v_4.

Vértices da região admissível e solução ótima

Vimos no Problema 1 que uma solução ótima era atingida num vértice da região admissível. Nesta secção vamos generalizar essa propriedade para o problema genérico de um problema de PL,

$$\begin{array}{ll} \text{max (ou } \mathit{min}) & z = c_1\,x_1 + c_2\,x_2 + \cdots + c_k\,x_k \\ s.a & (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{R}, \end{array}$$

com $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ e onde $\mathcal{R}$ é a região admissível descrita no slide 202.

Teorema

Se $\mathcal{R}$ for limitada e não vazia tem-se:

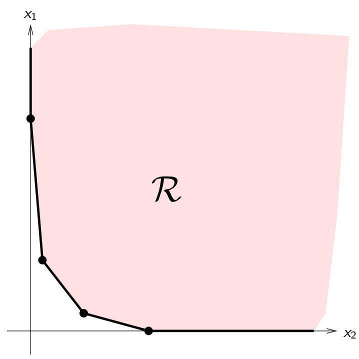
- Existe um vértice de $\mathcal{R}$ que é solução ótima do problema de PL anterior.
- Se k vértices de $\mathcal{R}$, $v_1, \ldots, v_k$, são soluções ótimas do problema de PL anterior então qualquer combinação convexa destes k vértices é também solução ótima do mesmo problema de PL.

O teorema anterior reduz o problema de determinar uma solução ótima de um problema de PL com região admissível limitada e não vazia, ao problema de identificar os vértices dessa região admissível (que são em número finito) e determinar o(s) vértice(s) onde a função objectivo atinge o maior ou menor valor, consoante o problema seja de maximização ou minimização.

Caso da região admissível não limitada

Observações

- Se a região admissível de um problema de PL for não limitada (como na região da figura abaixo) pode não existir um vértice onde ocorra uma solução ótima.
- Por exemplo, no exercício 32.3 da sebenta de exercícios existe um vértice onde ocorre o mínimo da f.o., mas não existe um vértice onde ocorra o máximo (que é $+\infty$).



Formulação de um problema de PL na forma *standard*

Definição de formulação de problema de PL na forma *standard*

Um problema de PL diz-se na forma *standard* se as todas as restrições lineares forem equações lineares e as variáveis de decisão tomarem valores não negativos.

- Iremos ver que os vértices da região admissível do problema de PL original vão corresponder a um certo tipo especial de soluções, ditas soluções básicas admissíveis (s.b.a), da região admissível do problema de PL convertido para a forma *standard*.
- No que se segue iremos considerar apenas problemas de PL em que as respetivas variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ tomam valores não negativos, isto é, com restrições de sinal do tipo $x_1, \ldots, x_k \geq 0$.

Conversão de inequações lineares para equações lineares

As seguintes equivalências permitem converter cada restrição funcional definida por uma inequação linear numa restrição definida por uma equação linear acrescentando variáveis auxiliares ditas variáveis de folga que também tomam valores não negativos:

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k \leq b \quad & \Leftrightarrow \quad \overbrace{b - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k)}^{f} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f & = & b - (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k) \\ f & \geq & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k + f & = & b \\ f & \geq & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_kx_k \geq b' \quad & \Leftrightarrow \quad \overbrace{a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_kx_k - b'}^{f'} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f' & = & a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_kx_k - b' \\ f' & \geq & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a'_1x_1 + a'_2x_2 + \ldots + a'_kx_k - f' & = & b' \\ f' & \geq & 0. \end{array} \right. .
\end{aligned}
$$

Conversão de um problema de PL para a forma *standard*

Regras de conversão

- Para cada restrição funcional do tipo,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k \leq b$$

  acrescentamos uma nova variável f e substituímos essa restrição pelas restrições linear e de sinal,

$$a_1x_1 \ + \ a_2x_2 \ + \ \cdots \ + \ a_kx_n + f \ = b, \qquad f \geq 0;$$

- Para cada restrição funcional do tipo,

$$a'_1x_1 \ + \ a'_2x_2 \ + \ \cdots \ + \ a'_{ik}x_k \geq b',$$

  acrescentamos uma nova variável f' e substituímos essa restrição pelas restrições linear e de sinal,

$$a'_1x_1 \ + \ a'_2x_2 \ + \ \cdots \ + \ a'_kx_n - f' \ = \ b', \qquad f' \geq 0;$$

- As restrições funcionais do tipo, $a''_1x_1 \ + \ a''_2x_2 \ + \ \cdots \ + \ a''_kx_k = b''$ e a função objetivo ficam inalteradas.

Problema 2

Problema 2

Uma empresa produz três tipos de fertilizantes, A, B e C. Cada tonelada de fertilizante A, B e C gera 50, 40 e 60 unidades de resíduos tóxicos e origina um lucro de 10, 5 e 10 euros, respetivamente. A empresa tem capacidade para produzir 15 mil toneladas de fertilizantes por mês. Compromissos já assumidos obrigam a empresa a entregar mensalmente 5 mil toneladas de fertilizante A a um cliente. Pretende-se determinar o plano de produção mensal que gera a menor quantidade possível de resíduos tóxicos de modo a obter-se um lucro mensal de pelo menos 100 mil euros e uma produção mensal nunca inferior a 80% da capacidade de produção da empresa.

Dados do problema:

	Resíduos	Lucro	
Fertlizante A	50 unid./t	10 €/t	$\geq$ 5000 t/mês
Fertlizante B	40 unid./t	5 €/t	
Fertlizante C	60 unid./t	10 €/t	
	min	$\geq$ 100000 €	
Capacidade mensal	$\leq$ 15000 t		
Produção mensal	$\geq$ .80 $\times$ 15000 t		

Construção do modelo matemático

Variáveis de decisão

Temos 3 variáveis x_A, x_B e x_C que representam, respetivamente, as quantidades, em toneladas, de fertilizante dos tipos A, B e C a produzir mensalmente.

Função objetivo

A função objetivo (f.o.) traduz a quantidade de resíduos tóxicos gerados mensalmente que se pretende minimizar:

$$z = 50x_A + 40X_B + 60x_C.$$

Restrições funcionais

- A **capacidade mensal de produção** de fertilizantes é de 15000 t: $x_A + x_B + x_C \leq 15000$.
- A **produção mensal de fertilizante A** deve ser pelo menos de 5000 t: $x_A \geq 5000$.
- O **lucro mensal** deve ser pelo menos 100000 €: $10x_A + 5x_B + 10x_C \geq 100000$.
- a **produção mensal de fertilizantes** deve representar pelo menos 80 % da capacidade mensal de produção: $x_A + x_B + x_C \geq 15000 \times 0.80 = 12000$.

Restrições de sinal

Pela sua natureza as variáveis não podem tomar valores negativos: $x_A, x_B, x_C \geq 0$.

Formulação do Problema 2 em PL

O Problema 2 pode ser formulado em PL como,

$$\begin{array}{lllr}
\min & z = 50x_A + 40X_B + 60x_C & & \\
\text{s.a} & x_A + x_B + x_C & \leq 15000 & (1) \\
 & x_A & \geq 5000 & (2) \\
 & 10x_A + 5x_B + 10x_C & \geq 100000 & (3) \\
 & x_A + x_B + x_C & \geq 15000 \times 0.80 = 12000 & (4) \\
 & x_A,\ x_B,\ x_C \geq 0 & &
\end{array}$$

em que

- x_A, x_B e x_C representam, respetivamente, as quantidades, em toneladas, de fertilizante dos tipos A, B e C a produzir mensalmente.

Vamos converter esta formulação para a forma *standard* aplicando as regras do slide 208 (ver também o slide 207).

Formulação do Problema 2 na forma *standard*

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min & z = 50x_A + 40X_B + 60x_C & & & & & & & \\
\text{s.a} & x_A + \ x_B + \ x_C & +f_1 & & & & = & 15000 & (1) \\
 & x_A & & -f_2 & & & = & 5000 & (2) \\
 & 10x_A + 5x_B + 10x_C & & & -f_3 & & = & 100000 & (3) \\
 & x_A + \ x_B + \ x_C & & & & -f_4 & = & 12000 & (4) \\
 & x_A, \ x_B, \ x_C, & f_1, & f_2, & f_3, & f_4 \geq 0 & & &
\end{array}
$$

em que as variáveis do problema x_A, x_B e x_C já foram descritas no slide anterior e as varívеis de folga, f_1, f_2, f_3 e f_4 têm o seguinte significado:

- $f_1 = 15000 - x_A - x_B - x_C$ que representa a capacidade de produção mensal de fertilizantes (em toneladas) não utilizada.
- $f_2 = x_A - 5000$ que representa a quantidade de fertilizante A produzida (em toneladas) para além do compromisso assumido.
- $f_3 = 10x_a + 5x_B + 10x_C - 100000$ que representa o lucro obtido (em €) acima do lucro mínimo pretendido de 100000€.
- $f_4 = x_A - x_B - x_C - 12000$ que representa a produção mensal de fertilizantes (em toneladas) produzida acima de 80% da capacidade mensal de produção.