Soluções básicas admissíveis (s.b.a.)

Seja $A_{m\times n}$ tal que $\text{car}(A) = m$ e $n > m$. Em particular, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m$ e portanto o sistema $[A \,|\, b]$ é possível indeterminado para todo $b \in \mathbb{R}^m$. Define-se a região

$$\mathcal{F} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ A\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0\},$$

onde $\bar{x} \geq 0$ significa que todas as componentes de $\bar{x}$ são não negativas.

Definição de solução básica admissível

- Uma solução básica é uma solução $x_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}^n$ obtida escolhendo um conjunto linearmente independente de m colunas $i_1, \ldots, i_m$ de A, resolvendo o sistema em ordem apenas às m correspondentes variáveis $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ e fazendo as restantes $n - m$ variáveis iguais a zero.
- Se na solução básica $x_{i_1,\ldots,i_m}$ todas as componentes forem não negativas, $x_{i_1,\ldots,i_m}$ diz-se uma solução básica admissível (s.b.a.) de $\mathcal{F}$. Caso contrário, $x_{i_1,\ldots,i_m} \notin \mathcal{F}$ e diz-se solução básica não admissível (s.b.n.a.)

Como existem $\binom{n}{m}$ formas distintas de escolher m colunas de um conjunto de n, o número de soluções básicas (admissíveis e não admissíveis) não pode exceder $\binom{n}{m}$ (note-se que apenas escolhas de conjuntos linearmente independentes com m colunas dão origem a soluções básicas).

"Toy example"

Exercício na aula

Determinar as soluções básicas admissíveis de $\mathcal{F} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ A\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0\}$, em que $[A \,|\, b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right]$.

Resolução: A matriz A tem $n = 3$ colunas e $m = 2$ linhas, tendo-se $\text{car}(A) = m = 2$ e existem $\binom{3}{2} = 3$ maneiras distintas de escolher 2 colunas em 3:

- Resolvendo o sistema apenas com as colunas 1 e 2 de A (que são linearmente independentes), vem $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$.
  Logo $x_1 = x_2 = 2$. Fazendo $x_3 = 0$ obtém-se a s.b.a. $x_{1,2} = (2, 2, 0)$.
- Resolvendo o sistema apenas com as colunas 1 e 3 de A (que são linearmente independentes), vem $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$.
  Logo $x_1 = 3$ e $x_3 = 1$. Fazendo $x_2 = 0$ obtém-se a s.b.a. $x_{1,3} = (3, 0, 1)$.
- Resolvendo o sistema apenas com as colunas 2 e 3 de A (que são linearmente independentes), vem $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.
  Logo $x_2 = 6$ e $x_3 = -2$. Fazendo $x_1 = 0$ obtém-se a s.b.n.a $x_{2,3} = (0, 6, -2)$.

Logo $\mathcal{F}$ possui as s.b.a. $x_{1,2} = (2, 2, 0)$ e $x_{1,3} = (3, 0, 1)$ e a s.b.n.a $x_{2,3} = (0, 6, -2)$.

Vértices da região admissível e s.b.a.

O seguinte resultado torna evidente a importância do conceito de s.b.a.

Teorema

Consideremos um problema de PL com k variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ (problema original)

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \\ \text{s.a} & x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in \mathcal{R} \end{array}$$

e o correspondente problema na forma *standard* (ao qual se acrescentaram s variáveis de folga $f_1, \ldots, f_s$):

$$\begin{array}{ll} \min & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_kx_k \\ \text{s.a} & \bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s) \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Para cada vetor $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ denotamos por $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^{k+s}$ o vetor que se obtém adicionando as respetivas folgas $f_1, \ldots, f_s$. Tem-se então que:

$$\begin{array}{c} x = (x_1, \ldots, x_k) \\ \text{é vértice de } \mathcal{R} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s) \\ \text{é s.b.a. de } \mathcal{F} \end{array}$$

Exemplo: Problema 1 revisitado

Consideremos a formulação do Problema 1 do slide 196 com a região admissível $\mathcal{R}$ definida pelas restrições lineares já simplificadas descritas no slide 197:

Problema original

$$\begin{array}{lrl} \max & z = & 300\,x_1 + 200\,x_2 \\ \text{s.a} & & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & & 2\,x_1 + x_2 \leq 100 \\ & & x_1 \leq 40 \\ & & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$\dashrightarrow$

Problema na forma *standard*

$$\begin{array}{ll} \max & z = 300\,x_1 + 200\,x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + f_1 = 80 \\ & 2\,x_1 + x_2 + f_2 = 100 \\ & x_! + f_3 = 40 \\ & x_1,\, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Temos a correspondência,

$$x = (x_1, x_2) \longrightarrow \bar{x} = (x_1, x_2, f_1, f_2, f_3) \text{ em que } \left\{ \begin{array}{lcl} f_1 & = & 80 - (x_1 + x_2) \\ f_2 & = & 100 - (2x_1 + x_2) \\ f_3 & = & 40 - x_1 \end{array} \right.$$

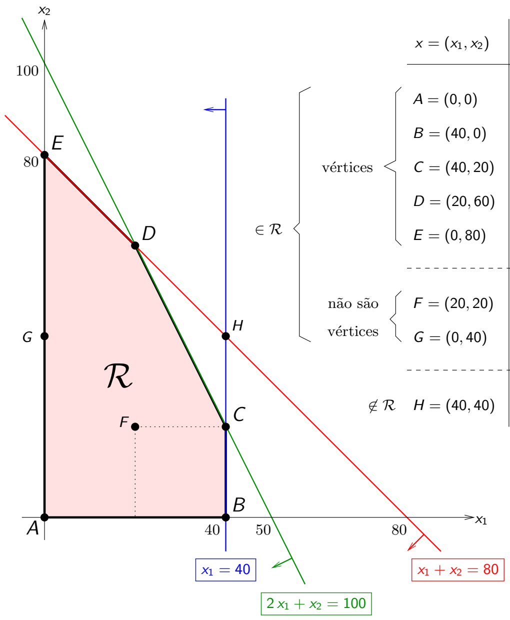
que associa a cada vértice da região admissível $\mathcal{R}$ do problema original uma s.b.a. da região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma standard e vice-versa.

Considerando, por exemplo, o vértice $D = (20, 60) \in \mathcal{R}$ (ver o slide 201),

$$D = (20, 60) \quad \longrightarrow \quad \bar{D} = (20, 60, 0, 0, 20) \text{ s.b.a. de } \mathcal{F}.$$

De facto, calculando as folgas, $f_1 = 80 - (x_1 + x_2) = 80 - (20 + 60) = 0$, $f_2 = 100 - (2x_1 + x_2) = 100 - (40 + 60) = 0$ e $f_3 = 40 - x_1 = 40 - 20 = 20$.

Vértices e correspondentes s.b.a. do Problema 1, etc. . .



		$x = (x_1, x_2)$	$\bar{x} = (x_1, x_2, f_1, f_2, f_3)$		
$\in \mathcal{R}$	vértices	$A = (0,0)$	$\bar{A} = (0,0,80,100,40)$	s.b.a.	$\in \mathcal{F}$
		$B = (40,0)$	$\bar{B} = (40,0,40,20,0)$		
		$C = (40,20)$	$\bar{C} = (40,20,20,0,0)$		
		$D = (20,60)$	$\bar{D} = (20,60,0,0,20)$		
		$E = (0,80)$	$\bar{E} = (0,80,0,20,40)$		
	não são vértices	$F = (20,20)$	$\bar{F} = (20,20,40,40,20)$	não são s.b.a.	
		$G = (0,40)$	$\bar{G} = (0,40,40,60,40)$		
$\notin \mathcal{R}$		$H = (40,40)$	$\bar{H} = (40,40,0,-20,0)$	s.b.n.a	$\notin \mathcal{F}$ (tem uma componente negativa)

Variáveis de folga:

$f_1 = 80 - (x_1 + x_2)$

$f_2 = 100 - (2\,x_1 + x_2)$

$f_3 = 40 - x_2$

Note-se que todas as s.b.a. têm 2=5-3 zeros e todas as suas componentes são não negativas. No próximo slide vamos dar um critério para verificar se um dado vetor é s.b.a. da região admissível $\mathcal{F}$ de um problema na forma *standard*.

Como reconhecer soluções básicas admissíveis ?

Critério para identificar uma s.b.a

Consideremos $A_{m\times n}$ tal que car$(A) = m$ e $n > m$ e

$$\mathcal{F} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m \ : \ A\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0\}.$$

Pode-se mostrar que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ é uma solução básica admissível de $\mathcal{F}$ se e só se verificar as seguintes condições:

- $\bar{x}$ é solução do sistema linear $\left[A \mid b\right]$, isto é, verifica $A\,\bar{x} = b$.
- $\bar{x} \geq 0$, isto é, todas as suas componentes são não negativas.
- O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é superior ou igual a $n - m$ (número de variáveis - número de equações).
- As colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x}$ formam um conjunto de vetores linearmente independente.

Note que se $\bar{x}$ verificar todas as condições excepto a segunda então $\bar{x}$ é solução básica não admissível.

Exemplo

Exercício na aula

Considere o problema de PL (adaptado do Problema 2 do slide 212):

$$
\begin{array}{lllll}
\text{min} & z = 5x_1 + 4X_2 + 6x_C & & & \\
\text{s.a} & x_1 + \; x_2 + \; x_3 & & \leq & 125 \\
 & x_1 + \; x_2 + \; x_3 & & \geq & 120 \\
 & x_1 & & \geq & 50 \\
 & 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 & & = & 1000 \\
 & x_1, x_2, x_3 & & \geq & 0
\end{array}
$$

- Converta o problema à forma standard.
- Mostre que $(50, 50, 25)$ é vértice da região admissível.

Resolução do exercício - forma *standard*

Aplicando as regras de conversão do slide 208 podemos formular o problema do slide anterior na forma *standard* como

$$
\begin{array}{llll}
\text{min} & z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 & & \\
\text{s.a} & x_1 + \; x_2 + \; x_3 + f_1 & = & 125 \\
 & x_1 + \; x_2 + \; x_3 \; - f_2 & = & 120 \\
 & x_1 \; - f_3 & = & 50 \\
 & 10x_1 + 5x_2 + 10x_3 & = & 1000 \\
 & x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

em que

- $f_1 = 125 - (x_1 + x_2 + x_3)$,
- $f_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 120$,
- $f_3 = x_1 - 50$.

Resolução do exercício - mostrar que é vértice

Calculando as folgas associadas ao vetor $x = (x_1, x_2, x_3) = (50, 50, 25)$ obtém-se o vetor $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3) = (50, 50, 25, 0, 5, 0)$. De facto,

- $f_1 = 125 - (x_1 + x_2 + x_3) = 125 - (50 + 50 + 25) = 0$
- $f_2 = x_1 + x_2 + x_3 - 120 = 125 - 120 = 5$
- $f_3 = x_1 - 50 = 50 - 50 = 0.$

Tem-se que $x = (50, 50, 25)$ é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se $\bar{x} = (50, 50, 25, 0, 5, 0)$ for s.b.a. da região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma *standard*.

Para mostrar que $\bar{x} = (50, 50, 25, 0, 5, 0)$ é s.b.a. de $\mathcal{F}$ começamos por escrever $\mathcal{F}$ em notação matricial,

$$\mathcal{F} = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^6 \;:\; A\,\bar{x} = b,\; \bar{x} \geq 0\},$$

com

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 125 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 120 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{array}\right]$$

matriz ampliada do sistema linear que define a região admissível na forma *standard* (ver o slide anterior) e em que $\bar{x} \geq 0$ significa $x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, f_3 \geq 0$.

Resolução do exercício - mostrar que é vértice (cont.)

Pelo slide 217 tem-se então que $\bar{x} = (50, 50, 25, 0, 5, 0)$ é s.b.a. de $\mathcal{F}$ se e só se verificar as 4 condições seguintes:

- $\bar{x}$ é solução de $[A \mid b]$, isto é, verifica $A\,\bar{x} = b$. De facto,

$$A\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 50 \\ 25 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 120 \\ 50 \\ 1000 \end{bmatrix} = b.$$

- $\bar{x} \geq 0$, isto é, todas as suas componentes são não negativas, o que se verifica.
- O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é superior ou igual a $n - m$ com n número de variáveis (contando com variáveis de folga) e m número de restrições funcionais. De facto, $\bar{x}$ possui 2 componentes nulas verificando-se $2 \geq n - m = 6 - 4$ (6 variáveis e 4 restrições).
- As colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x}$ formam um conjunto de vetores linearmente independente (ver o próximo slide).

Resolução do exercício - mostrar que é vértice (concl.)

As colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x} = (50, 50, 25, 0, 5, 0)$ são a 1^{a}, 2^{a}, 3^{a} e 5^{a} colunas de A.

Logo basta mostrar que a matriz B constituída por estas 4 colunas tem característica 4, ou equivalentemente, que $\det B \neq 0$ (note-se que apenas se pode usar o determinante nos casos em que a matriz é quadrada).

De facto,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 10 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B'.$$

Como todas as colunas da matriz em escada B' têm pivot o conjunto das colunas de A associadas às 4 componentes não nulas de $\bar{x}$ é linearmente independente.

Verificámos as 4 condições. Logo $\bar{x}$ é s.b.a. de $\mathcal{F}$ e portanto x é vértice de $\mathcal{R}$.

TPC: verifique que $\det(B) \neq 0$.

BOM $\mathcal{N}(A^T AL)$!

com $A_{25\times 12}$ e $L_{12\times 2023}$