INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

**ESTATÍSTICA E DELINEAMENTO - 2023-24**

22 janeiro 2024 **Segunda Chamada de Exame** **SOLUÇÕES**

## I

1. O modelo ajustado é o modelo de regressão linear simples que está descrito em pormenor nas páginas 29 a 31 dos Apontamentos de Estatística e Delineamento, O Modelo Linear (Cadima, 2020), em particular, na Definição 2.10, e nos slides das aulas teóricas.

2. $A = 9.47147651$, $B = 0.23008$, $C = 89.84265$, $D = 1$, $E = 37$

3. A afirmação feita é falsa. Com base no teste t, de hipóteses $H_0 : \beta_1 = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$, e com um nível de significância $\alpha = 0.05$, rejeita-se a hipótese nula, isto é, há evidência experimental que existe uma relação linear significativa entre peso e diâmetro dos bolbos de alho (nota: esta conclusão é facilmente observada tendo em conta o valor do *p-value* deste teste t, igual, neste caso, ao do teste F de ajustamento global).

4. $max(h_{ii})$ ocorre para `peso` $= 16.659$ e $\hat{y} = 3.6602$ cm.

5. $\bar{\hat{y}} = \bar{y} = 3.007$ cm. A demonstração foi feita nas aulas teóricas da UC e é apresentada na página 13 dos Apontamentos de Estatística e Delineamento, O Modelo Linear (Cadima, 2020).

6. $]2.66221, 3.60563[$

   Em 95% dos bolbos de alho com 12 g de peso, o diâmetro do bolbo pertencerá a este intervalo.

## II

1. Demostração feita nas aulas teóricas da UC e apresentada nas páginas 108-109 dos Apontamentos de Estatística e Delineamento, O Modelo Linear (Cadima, 2020).

2. Os dados da variável resposta utilizados nos dois ajustamentos são os mesmos, logo,
   $SQT = (n-1)s_y^2 = \boxed{SQT_{RLS} = SQT_{RLM}}$

   Como $R^2 = SQR/SQT$ e $R^2_{RLS} < R^2_{RLM}$ então

   $R^2_{RLS} \times SQT < R^2_{RLM} \times SQT \Leftrightarrow \boxed{SQR_{RLS} < SQR_{RLM}}$

   Além disso,
   $SQT = SQRE_{RLS} + SQR_{RLS} = SQRE_{RLM} + SQR_{RLM} \Rightarrow \boxed{SQRE_{RLS} > SQRE_{RLM}}$

3. $R^2 = 0.9417$ indica que 94.17% da variabilidade observada para o diâmetro dos bolbos de alho é explicada por esta regressão linear múltipla, um valor bastante elevado.

   O teste de ajustamento global foi explicado nas aulas téoricas (slides das aulas teóricas), feito nas aulas práticas em diversos exercícios e está descrito em pormenor nas páginas 125-126 dos "Apontamentos de Estatística e Delineamento, O Modelo Linear"(Cadima, 2020) (nota: $F_{calc} = 106.6075$).

4. Simbolicamente, a pergunta traduz-se em $\beta_4 > 1$? Dando o ónus da prova a esta desigualdade, o teste t que permitirá dar resposta a esta questão tem como hipóteses $H_0 : \beta_4 \leq 1 \quad vs. \quad H_1 : \beta_4 > 1$. Com um nível de significância $\alpha = 0.05$, não se rejeita a hipótese nula, isto é, não há evidência experimental para afirmar que, quando a largura do dente aumenta 1 cm (mantendo os valores dos restantes preditores constantes), o diâmetro do bolbo aumenta, em média, mais de 1 cm (nota: $T_{cal} = \frac{0.96275-1}{\sqrt{0.0117}} = -0.3444$).

5. A afirmação é falsa. Ainda que existam várias variáveis preditoras candidatas a serem excluídas do modelo (todas as que têm um *p-value* superior ao $\alpha$ considerado para o teste t de hipóteses $H_0 : \beta_i = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_i \neq 0$), o primeiro passo do método de exclusão sequencial só retira a que tem o maior *p-value* (neste caso, a variável `altura`). Após esta exclusão, o modelo é reajustado e volta a analisar-se a significância dos parâmetros do novo submodelo. Com a informação disponível, não é por isso possível afirmar qual é o submodelo final.

6. Como o modelo completo e o submodelo diferem num único preditor, `altura`, o teste F parcial pedido é equivalente ao teste t de hipóteses $H_0 : \beta_5 = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_5 \neq 0$. Não só as hipóteses são as mesmas, como a estatística do teste F parcial é o quadrado da estatística do teste t referido, $F_{Parcial_{cal}} = T_{cal}^2$ e o *p-value* dos dois testes é igual. Conclusão, o modelo completo e o seu submodelo sem o preditor altura não diferem significativamente ao nível $\alpha = 0.05$ (ou a qualquer um dos habituais níveis de significância), pelo que se deve optar pelo submodelo mais parcimonioso.

## III

1. (a) O modelo correspondente ao delineamento experimental descrito no enunciado, será o modelo ANOVA a 2 fatores de efeitos fixos, sem efeitos de interação, equilibrado, descrito na página 188 das folhas de apoio, assim como nos slides das aulas teóricas. Trata-se de adaptar este modelo ao problema em estudo.

   (b) Coluna `Df`, linha `variedade`: 4;
   Coluna `Df`, linha `bloco`: 3;
   Coluna `Df`, linha `Residuals`: 12;
   Coluna `Mean Sq`, linha `bloco`: 1707.67;
   Coluna `F Value`, linha `variedade`: 46.55.

   (c) Variância amostral dos pesos dos frutos na totalidade das observações:

   $$s_y^2 = 11797.2 \quad (g/fruto)^2$$

   ($nota : SQT = (n-1)s_y^2$ e $SQT = SQA + SQB + SQRE = 224147$.)

   (d) Responde-se à questão efetuando um Teste F aos efeitos do factor *variedade*. Teste descrito em pormenor na página 192 das folhas de apoio, assim como nos slides das aulas teóricas. Conclui-se, ao nível de significância $\alpha$=0.05, que a variedade afecta o peso do fruto (resultado imediatamente visível tendo em conta o p-value deste teste apresentado no output do R).

   (e) Como explicado nas aulas teóricas, descrito nas páginas 196 e 197 das folhas de apoio e constante no formulário, numa ANOVA a dois Factores, sem efeitos de interacção, os valores ajustados são dados por

   $$\hat{Y}_{ijk} \quad = \quad \overline{Y}_{i..} + \overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...} \qquad , \quad \forall\, i, j, k \; .$$

Portanto, o valor ajustado do peso do fruto para a observação feita na variedade $V22$ no bloco $B1$ é

$$\hat{Y}_{111} = \overline{Y}_{1..} + \overline{Y}_{.1.} - \overline{Y}_{...} = 374.2 + 197.76 - 222.887 = 349.07 g/fruto.$$

2. (a) Gráfico para estudo dos resíduos, nomeamente para validação do pressuposto da normalidade dos erros aleatórios. Trata-se de um gráfico de quantis contra quantis, ou *qq-plot*, que compara os *quantis empíricos* dos $n$ resíduos standardizados com os *quantis teóricos* numa distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$. Explicação da sua interpretação nas páginas 74 e 75 das folhas de apoio, assim como nos slides das aulas teóricas.

   (b) De acordo com o delineamento experimental descrito (delineamento totalmente casualizado a 1 factor), o teste não paramétrico a realizar é o teste de Kruskal-Wallis. Tem-se 1 factor em estudo, variedade de tomate, com $k = 5$ níveis (ou seja, 5 variedades em estudo), com 6 observações em cada nível do factor (ou seja, com 6 observações em cada variedade) ($n_i = 6, \forall\, i$), portanto, um delineamento equilibrado. O número total de observações é $n = 30$. De forma informal, temos as seguintes hipóteses:

   $H_0$: Os valores observados do número de frutos com defeito em cada variedade de tomate são globalmente semelhantes,
   vs.
   $H_1$: Há pelo menos uma variedade de tomate com valores do número de frutos com defeito globalmente maiores (ou menores) do que outras variedades.

   $H_{calc} = 21.22$, $\chi^2_{0.05(4)} = 9.488$, logo, rejeita-se $H_0$ para $\alpha = 0.05$. Para este nível de significância, há evidência estatística para considerar que há pelo menos uma variedade de tomate que apresenta valores do número de frutos com defeito globalmente maiores (ou menores) do que as outras.