

# Modelos Matemáticos e Aplicações

## Modelos Lineares Generalizados

Jorge Cadima

Matemática (DCEB), Instituto Superior de Agronomia (ULisboa)

2023-24

# Bibliografia

- Agresti, A. (2015) *Foundations of Linear and Generalized Linear Models*, Wiley.
- Dobson, A.J. & Barnett, A.G. (2008) *An Introduction to Generalized Linear Models*, 3rd ed., CRC Press.
- McCullough, P. & Nelder, J. (1989) *Generalized Linear Models*, Chapman & Hall.
- McCulloch, C. & Searle, S. (2001) *Generalized, Linear, and Mixed Models*, John Wiley & Sons. **Mat 600-62.**
- Agresti, A. (1990) *Categorical Data Analysis*, John Wiley & Sons. **Mat 401-62.**
- Hosmer, D.W. & Lemeshow, S. (1989) *Applied Logistic Regression*, John Wiley & Sons. **Mat 258-62.**

## GLMs no :

- Faraway, J.J. (2006) *Extending the Linear Model with R: Generalized Linear, Mixed Effects and Nonparametric Regression Models*, Chapman & Hall/CRC.
- Fox, J. & Weisberg, S. (2011) *An R Companion to Applied Regression, 2d Ed*, Sage Publications (R package: `car`).
- Venables & Ripley (2002). *Modern Applied Statistics with S* (4a. edição), Springer. (R package: `MASS`).

# Modelos Lineares Generalizados

## Modelos Lineares Generalizados (MLGs)

### (Generalized Linear Models, GLMs):

- são uma família muito vasta de modelos;
- são extensão do Modelo Linear;
- englobam muitos modelos previamente conhecidos e usados, nalguns casos há largas décadas, entre eles:
  - ▶ modelo *probit*
  - ▶ modelo *logit* (ou Regressão Logística)
  - ▶ modelos log-lineares
  - ▶ o próprio modelo linear.
- o “chapéu de chuva comum” dos MLGs foi introduzido e formalizado por McCullagh e Nelder (1989);

# Exemplo motivador: variável resposta dicotómica

## Exemplo Hosmer & Lemeshow

Hosmer e Lemeshow, em *Applied Logistic Regression* (Wiley, 1989) têm dados sobre  $n = 100$  pacientes, com variáveis:

- idade – numérica;
- doença arterial coronária (DAC) – **variável dicotómica** (sim/não; 1/0).

Eis as primeiras seis linhas da *data frame* HL correspondente:

```
> head(HL)
```

	Idade	DAC
1	20	0
2	23	0
3	24	0
4	25	0
5	25	1
6	26	0

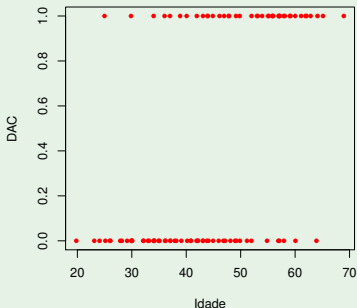
Quer-se relacionar a existência de DAC (variável resposta  $Y$ ) com a idade (preditor  $X$ ). O gráfico  $Y$  vs.  $X$  é pouco prometededor.

# Exemplo 1: DAC vs. idade

## Exemplo Hosmer & Lemeshow

```
> plot(DAC ~ Idade , data=HL , cex=0.8 , col="red" , pch=16 ,  
+ xlab="Idade" , main="Dados de Hosmer & Lemeshow (Tabela 1.1)")
```

Dados de Hosmer & Lemeshow (Tabela 1.1)



# O Modelo Linear

Recorde-se que o **modelo linear** relaciona

- uma **variável resposta** numérica  $Y$  com
- **preditores**  $X_1, X_2, \dots, X_p$ ,

através da equação, para  $n$  observações **independentes**  $Y_i$ :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1(i)} + \beta_2 X_{2(i)} + \dots + \beta_p X_{p(i)} + \varepsilon_i,$$

com  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Isto é, no Modelo Linear:

- $E[Y_i | X_1 = x_{1(i)}, \dots, X_p = x_{p(i)}] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}$ ,
- $Y_i$  **independentes, com distribuição Normal** (e variâncias iguais).

# A generalização do modelo linear

## Modelo Linear

- $E[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}$ ,
- $Y_i$  com distribuição Normal.

Num **Modelo Linear Generalizado** há duas extensões:

- $g(E[Y_i]) = \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}$ ,  
com  $g$  uma função invertível chamada **função de ligação** (link function).
- $Y_i$  com distribuição na **família exponencial de distribuições**.

Assim, um **MLG** modela o **valor esperado** duma variável resposta com **distribuição na família exponencial**, através da equação:

$$\mu_i = E[Y_i] = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)}) .$$

Nota: O **Modelo Linear** é caso particular de **MLG**: a Normal pertence á família exponencial de distribuições e a **função de ligação** é a **identidade**:  $g(x) = x, \forall x$ .

## As três componentes dum MLG (cont.)

Ou seja, e nas palavras de Agresti (1990, p.81):

*um MLG é um modelo linear para uma transformação da esperança duma variável aleatória cuja distribuição pertence à família exponencial.*

**Nota:** ao contrário do Modelo Linear, nos MLGs não são explicitados erros aleatórios aditivos. A flutuação aleatória da variável resposta é dada directamente pela sua distribuição de probabilidades.



# A família exponencial de distribuições

A **família exponencial** de distribuições inclui, entre outras:

- a **Normal**
- a **Poisson** (para variáveis de **contagem**)
- a **Bernoulli** (para variáveis **dicotómicas – binary**)
- a “**Binomial/n**” (para **proporções** de êxitos em  $n$  provas de Bernoulli)
- a **Gama** (distribuição contínua assimétrica);  
inclui a **Exponencial** como caso particular.
- a **Gaussiana inversa** (distribuição contínua assimétrica).

**Nota:** Repare-se como a família exponencial inclui distribuições, quer de variáveis aleatórias **contínuas**, quer de variáveis aleatórias **discretas**.

# As três componentes dum MLG

Na definição de McCullagh e Nelder (1989), um Modelo Linear Generalizado assenta sobre **três componentes** fundamentais:

## 1) Componente aleatória (random component):

A variável resposta  $Y$  que se quer modelar, tratando-se duma:

- variável aleatória;
- da qual se recolhem  $n$  observações **independentes**; e
- cuja distribuição de probabilidades faz parte da família exponencial de distribuições (definida mais adiante);

**Nota:** a distribuição de probabilidades da **variável resposta aleatória  $Y$**  já não se restringe à Normal, podendo ser qualquer distribuição numa classe designada **família exponencial de distribuições**. Algumas generalizações de GLMs admitem distribuições além da família exponencial.

# As três componentes dum MLG (cont.)

## 2) Componente Sistemática:

Consiste numa combinação linear de variáveis preditoras, admitidas não aleatórias.

Havendo  $p$  variáveis preditoras e  $n$  observações:

$$\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \beta_3 x_{3(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} .$$

Os preditores podem ser variáveis numéricas, factores ou uma mistura de ambos, tal como no Modelo Linear.

Define-se a matriz do modelo  $\mathbf{X}_{n \times (p+1)}$  de forma idêntica ao Modelo Linear: uma primeira coluna de uns (associada à constante aditiva) e  $p$  colunas adicionais dadas pelas observações de cada variável preditora (variáveis indicatrizes, no caso de factores).

## As três componentes dum MLG (cont.)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \cdots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \cdots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \cdots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \cdots & x_{p(n)} \end{bmatrix}$$

O vector da componente sistemática do modelo é dado por:

$$\vec{\eta} = \mathbf{X}\vec{\beta},$$

sendo  $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p)$  o vector de coeficientes que define as  $n$  combinações lineares (afins) das variáveis predictoras, dado em  $\vec{\eta}$ .

# As três componentes dum MLG (cont.)

## 3) Função de ligação (link function):

uma função diferenciável e estritamente monótona  $g$  que associa as componentes aleatória e sistemática, através duma relação da forma:

$$\begin{aligned}g(\mu_i) &= g(E[Y_i]) = \vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)} \quad (\forall i = 1 : n)\end{aligned}$$

sendo  $\vec{x}_{[i]}^t$  a  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{X}$ , com os valores dos preditores na  $i$ -ésima observação.

O valor esperado de  $Y$ , dados os valores dos preditores, é então:

$$\mu_i = g^{-1}(\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta}) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x_{1(i)} + \beta_2 x_{2(i)} + \dots + \beta_p x_{p(i)})$$

# A família exponencial de distribuições

Diz-se que uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição na família exponencial (bi-paramétrica) usada por McCullagh & Nelder (1989), se a sua função densidade (caso  $Y$  contínua) ou de massa probabilística (se  $Y$  discreta) se puder escrever na forma:

$$f(y | \theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$$

onde

- $\theta$  e  $\phi$  são parâmetros (escalares reais); e
- $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot)$  são funções reais conhecidas.

Os parâmetros designam-se:

- $\theta$  – parâmetro natural; e
- $\phi$  – parâmetro de dispersão.

# A Normal

A família exponencial inclui a distribuição **Normal**, cuja f. densidade é:

$$\begin{aligned}f(y|\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} = e^{\ln\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)} e^{-\left(\frac{y^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} \\ &= e^{-\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \left(\frac{y^2-2y\mu+\mu^2}{2\sigma^2}\right)} = e^{\frac{y\mu-\mu^2}{\sigma^2} - \ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{y^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

é da forma  $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta-b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$ , com:

- $\theta = \mu$  (parâmetro natural)
- $\phi = \sigma^2$  (parâmetro de dispersão)
- $b(\theta) = \frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}$
- $a(\phi) = \phi = \sigma^2$
- $c(y, \phi) = -\ln(\sqrt{2\pi\phi}) - \frac{y^2}{2\phi} = -\ln(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{y^2}{2\sigma^2}$

# A Bernoulli

A variável aleatória dicotómica (binária)  $Y$  diz-se de Bernoulli com parâmetro  $p$ , se toma valor 1 com probabilidade  $p$  e valor 0 com probabilidade  $1 - p$ .

Para os valores  $y = 0$  ou  $y = 1$ , a função de massa probabilística duma Bernoulli pode escrever-se como:

$$\begin{aligned}f(y|p) &= p^y(1-p)^{1-y} = e^{\ln p^y} \cdot e^{\ln(1-p)^{(1-y)}} = e^{y \ln p} \cdot e^{(1-y) \ln(1-p)} \\ &= e^{y \ln p + \ln(1-p) - y \ln(1-p)} = e^{y \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \ln(1-p)}\end{aligned}$$

que é da família exponencial  $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$ , com:

- $\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta) = \ln\left(1 + \frac{p}{1-p}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = -\ln(1-p)$
- $a(\phi) = 1$
- $c(y, \phi) = 0$



# MLGs para variáveis resposta dicotómicas

Considere-se um Modelo com **variável resposta dicotómica (binária)**, i.e., que apenas toma dois possíveis valores: 0 e 1, e cuja distribuição é **Bernoulli**:

$$Y = \begin{cases} 1 & , & p \\ 0 & , & 1-p \end{cases}$$

Admite-se que o parâmetro  $p$  varia nas  $n$  observações de  $Y$ .

O valor esperado da  $i$ -ésima observação de  $Y$  é (também) a probabilidade de êxito:

$$E[Y_i] = 1 \cdot p_i + 0 \cdot (1 - p_i) = p_i$$

Uma função de ligação relaciona a probabilidade de êxito  $p_i$  com uma combinação linear dos preditores:

$$g(E[Y_i]) = g(p_i) = \vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} \iff E[Y_i] = p_i = g^{-1}(\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta}),$$

com  $\vec{x}_{[i]}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_{1_i} + \beta_2 x_{2_i} + \dots + \beta_p x_{p_i}$ .

# Funções de ligação

A mais simples é a **ligação identidade**:  $g(\mu) = \mu$ , que é a função ligação utilizada no Modelo Linear.

Cada distribuição da família exponencial, tem uma função de ligação que torna o valor esperado da variável resposta igual ao parâmetro natural,  $\theta$ .

## Função de ligação canónica

Num Modelo Linear Generalizado, a função  $g(\cdot)$  diz-se uma **função de ligação canónica** para a variável resposta  $Y$ , se  $g(E[Y]) = \theta$ .

As funções de ligação canónica são úteis porque simplificam o estudo do Modelo. A ligação canónica representa de alguma forma uma função de ligação “natural” para o respectivo tipo de distribuição da variável resposta.

# O Modelo Linear como um MLG

Eis alguns **exemplos de MLGs**:

## O Modelo Linear

O Modelo Linear é um caso particular de MLG, em que:

- cada uma das  $n$  observações da variável resposta  $Y$  tem **distribuição Normal, com variância constante  $\sigma^2$** ;
- a **função de ligação** é a **função identidade**, pois:

$$\mu = E[Y] = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p .$$

A **função de ligação identidade** é a **ligação canónica** para a **distribuição Normal**, pois  $\theta = \mu = E[Y]$ .

# A Regressão Logística

## Regressão Logística

A função de ligação **canónica** da distribuição Bernoulli é o **logit**, que transforma  $p = E[Y]$  no parâmetro natural  $\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$ :

$$g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

Um MLG para variáveis resposta dicotómicas, com a função de ligação **logit** é conhecido por **Regressão Logística**.

A função de ligação **logit** é o logaritmo do quociente entre a probabilidade de  $Y$  tomar o valor 1 (“êxito”) e a probabilidade de tomar o valor 0 (“fracasso”). Esse quociente é conhecido na literatura anglo-saxónica por **odds ratio**. A função de ligação **logit** designa-se o **log-odds ratio**.

## A Regressão Logística (cont.)

Dado um conjunto  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  de observações nas variáveis preditoras, tem-se com este modelo:

$$g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p = \vec{x}^t \vec{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p}{1-p} = e^{\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow \frac{1-p}{p} = e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{p} = 1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}} \quad \Leftrightarrow p = \frac{1}{1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}}}.$$

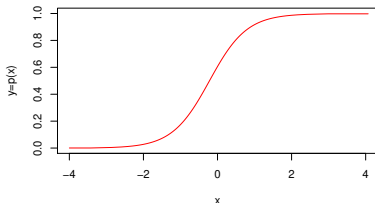
Numa Regressão Logística, a relação entre a probabilidade de êxito  $p = E[Y]$  e os valores das variáveis preditoras,  $\vec{x}$ , é:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}\left(\vec{x}^t \vec{\beta}\right) = \frac{1}{1 + e^{-\vec{x}^t \vec{\beta}}} = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p)}}$$

## A Regressão Logística (cont.)

No caso duma **única** variável preditora **quantitativa**, a relação entre  $Y$  e  $X$  é uma **curva logística**, daí a designação **Regressão Logística**.

$$p(x) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}}$$



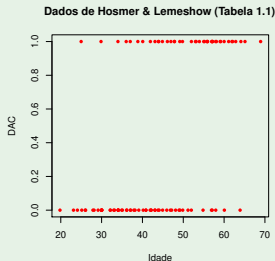
É uma função crescente, caso  $\beta_1 > 0$ , e decrescente caso  $\beta_1 < 0$ .

Quando há vários preditores,  $p(\vec{x}) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p)}}$  define uma **hipersuperfície** em  $\mathbb{R}^{p+1}$ .

# Novamente o exemplo DAC

## Dados Hosmer & Lemeshow

- idade – numérica;
- doença arterial coronária – variável dicotómica (sim/não; 1/0).



A variável resposta é dicotómica (binária). Será preciso relacionar  $p = E[Y]$ , a probabilidade de ter doença arterial coronária, com a idade  $X$ .

# Exemplo: A função de ligação

## Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Para procurar uma função de ligação adequada, é necessário outro gráfico, para visualizar a relação entre idade e **probabilidade** de DAC.

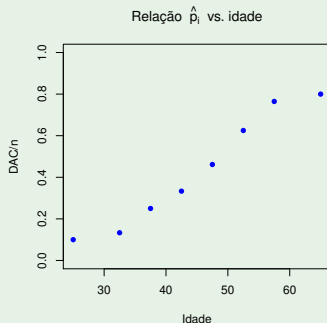
- Havendo repetições para cada idade, pode **estimar-se**  $p_i$  a partir da frequência relativa de DAC na  $i$ -ésima idade;
- Havendo poucas repetições em cada idade, pode-se **agrupar as observações em classes de idade**.

Classe	$n_i$	DAC	$\hat{p}_i$
20-30-	10	1	0.100
30-35-	15	2	0.133
35-40-	12	3	0.250
40-45-	15	5	0.333
45-50-	13	6	0.462
50-55-	8	5	0.635
55-60-	17	13	0.765
60-70-	10	8	0.800



## Exemplo: $\hat{p}_i$ vs. idade

Eis o gráfico das probabilidades estimadas vs. idade:



Nota: Aqui “idade” é o ponto médio de cada classe de idade.

Temos uma **relação sigmóide**. Talvez **logística**?

## Exemplo 1: criando a tabela no

Para criar a tabela do acetato 24, usou-se a função `hist`, que permite agrupar as idades em classes de idade. Com o argumento `plot=FALSE`, em vez de produzir o histograma, o comando devolve a informação usada. O argumento `right=FALSE` abre à direita os intervalos das classes.

Vamos começar por definir as fronteiras das classes.

```
> frclass <- c(20,30,35,40,45,50,55,60,70)
> hist(HL$Idade, breaks=frclass, plot=FALSE, right=FALSE)
$breaks      <-- fronteiras das classes
[1] 20 30 35 40 45 50 55 60 70
$counts      <-- frequências absolutas
[1] 10 15 12 15 13  8 17 10
$density      <-- alturas rectângulos histograma
[1] 0.010 0.030 0.024 0.030 0.026 0.016 0.034 0.010
$mids        <-- pontos intermédios de cada classe
[1] 25.0 32.5 37.5 42.5 47.5 52.5 57.5 65.0
[...]
```

## Exemplo 1: a tabela (cont.)

Vamos seleccionar as componentes `counts` e `mids` para construir duas colunas da tabela:

```
> info <- hist(HL$Idade, breaks=frclass, plot=FALSE, right=FALSE)
> HL.tab <- data.frame(idade=info$mids, nobs=info$counts)
> HL.tab
```

	idade	nobs
1	25.0	10
2	32.5	15
3	37.5	12
4	42.5	15
5	47.5	13
6	52.5	8
7	57.5	17
8	65.0	10

Falta a coluna com o número de pacientes com DAC em cada classe. Para a obter, repetimos procedimentos, mas seleccionando apenas as linhas de HL em que DAC tem valor 1.

## Exemplo 1: os dados tabelados

Eis o resto da tabela, incluindo os nomes de linhas:

```
> HL.tab$DAC <-          <-- cria uma nova coluna de nome DAC
+   hist(HL$Idade[HL$DAC==1], breaks=frclass, plot=F, right=F)$counts

> rownames(HL.tab) <-   <-- atribui os nomes de linhas da tabela
+   paste("[", frclass[-9] , ", " , frclass[-1] , "[", sep="")

> HL.tab
```

	idade	nobs	DAC
[20,30[	25.0	10	1
[30,35[	32.5	15	2
[35,40[	37.5	12	3
[40,45[	42.5	15	5
[45,50[	47.5	13	6
[50,55[	52.5	8	5
[55,60[	57.5	17	13
[60,70[	65.0	10	8

O gráfico no acetato 25 foi obtido com o comando:

```
> plot(DAC/nobs ~ idade , ylim=c(0,1) , data=HL.tab ,
+   main=expression(paste("Relação " , hat(p)[i] , "vs. idade")), pch=16, col="blue")
```

# Resposta dicotómica e Binomial

Agrupar as idades em classes transforma a variável resposta Bernoulli (1/0)  $Y_j$ , numa variável resposta  $Y_j$  que conta, em cada classe  $j$ , o número de “êxitos” (uns) nas  $n_j$  **provas de Bernoulli** dessa classe.

Para observações **independentes**,  $Y_j$  tem distribuição **Binomial**:  
 $Y_j \sim B(n_j, p_j)$ , onde  $p_j$  é a probabilidade de “êxito” na classe  $j$ .

A **Binomial** não é da família exponencial. Mas a **proporção de êxitos em  $n$  provas de Bernoulli**,  $W = Y/n$ , sim (se  $n$  conhecido).

Existe ligação íntima, no contexto de MLGs, entre considerar que temos:

- $n$  observações de variáveis resposta Bernoulli, com parâmetros  $p_j$ ; ou
- $m$  observações de variáveis resposta 'Binomial/ $n$ '  $W_j = \frac{Y_j}{n_j}$ , com  $Y_j \sim B(n_j, p_j)$ .

A ligação canónica, quer da Bernoulli, quer da Binomial/ $n$  é a **função logit**:

$$g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

## A 'Binomial/n'

Se  $X \sim B(n, p)$ , tem-se  $P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ .

Então  $Y = \frac{1}{n}X$  tem **distribuição na família exponencial**.

Tem-se  $P[Y = y] = P[X = ny]$ . A função de massa probabilística de  $Y$  pode escrever-se da seguinte forma, para  $y \in \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ :

$$\begin{aligned} f(y|p) &= \binom{n}{ny} p^{ny} (1-p)^{n-ny} = e^{\ln \left[ \binom{n}{ny} \right]} \cdot e^{ny \ln p} \cdot e^{(n-ny) \ln(1-p)} \\ &= e^{\ln \left[ \binom{n}{ny} \right] + ny \ln p + n \ln(1-p) - ny \ln(1-p)} = e^{\frac{y \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) + \ln(1-p)}{\frac{1}{n}} + \ln \left[ \binom{n}{ny} \right]} \end{aligned}$$

que é da família exponencial  $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$ , com:

- $\theta = \ln \left( \frac{p}{1-p} \right)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = \ln(1 + e^\theta) = \ln \left( 1 + \frac{p}{1-p} \right) = \ln \left( \frac{1}{1-p} \right) = -\ln(1-p)$
- $a(\phi) = \frac{\phi}{n} = \frac{1}{n}$
- $c(y, \phi) = \ln \left[ \binom{n}{ny} \right]$

No R, o comando para ajustar **Modelos Lineares Generalizados** é `glm`.

Há três **argumentos** fundamentais nesta função:

**formula** indica a **componente aleatória** (variável resposta) e a **componente sistemática** (preditores), de forma análoga à usada no modelo linear:

$$y \sim x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_p$$

**family** indica simultaneamente a **distribuição de probabilidades** da componente aleatória  $Y$  e a **função de ligação** do modelo.

**data** indica a *data frame* onde se encontram as variáveis.

## GLMs no (cont.)

A indicação da distribuição de probabilidades de  $Y$  faz-se através duma palavra-chave, que se segue ao nome do argumento `family`.

Por exemplo, um modelo com componente aleatória Bernoulli ou Binomial/ $n$ , indica-se assim:

```
family = binomial
```

Por omissão, é usada a **função de ligação canónica** dessa distribuição.

Caso se deseje **outra função de ligação** (implementada) acrescenta-se ao nome da distribuição, entre parênteses, o argumento `link` com a especificação da função de ligação.

Por exemplo, um modelo probit pode ser indicado da seguinte forma:

```
family = binomial(link=probit)
```



# Exemplo: o ajustamento do modelo

Assim, ajusta-se um MLG no R invocando o comando `glm` com três argumentos:

$$\text{glm}(\textit{formula}, \textit{family}, \textit{data})$$

Numa **Regressão Logística**,

- `family=binomial`.

Não é necessário especificar a função de ligação: por omissão é usada a ligação canónica da distribuição especificada.

- podem usar-se dados numa de 2 formas:
  - ▶ observações dicotómicas individuais (como a *data frame* HL);
  - ▶ observações tabeladas para valores repetidos do(s) preditor(es) (como a *data frame* HL.tab).

# As formulas para a Regressão Logística

As fórmulas do comando `glm` são semelhantes às do Modelo Linear:

$$y \sim x_1 + x_2 + \dots + x_p$$

Mas numa Regressão Logística, aos dois tipos de dados possíveis correspondem objectos `y` de natureza diferente:

- Se dados contêm observações individuais, `y` é vector de 0s e 1s:

```
> glm(DAC ~ Idade , family=binomial , data=HL)
```

- Se os dados estão tabelados, `y` deve ser uma matriz de duas colunas: uma com o número de “sim”s e outra com os número de “não”s, para cada valor (ou ponto médio da classe) do(s) preditor(es):

```
> glm(cbind(DAC,nobs-DAC) ~ idade , family=binomial, data=HL.tab)
```

# De novo o exemplo de Hosmer & Lemeshow

## Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Ajustar o modelo com base nas observações dicotómicas individuais:

```
> glm(DAC ~ Idade , family=binomial, data=HL)
```

```
Call: glm(formula = DAC ~ Idade , family = binomial , data = HL)
```

```
Coefficients:
```

```
(Intercept)      Idade  
   -5.3095      0.1109      <---- parâmetros estimados
```

A equação da logística ajustada é:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x)}} = \frac{1}{1 + e^{-(-5.3095 + 0.1109x)}}$$

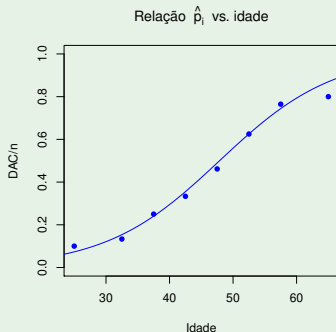
## Exemplo (cont.)

### Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Sobrepondo a logística ajustada ao gráfico dos  $\hat{p}_i$  vs. idade:

```
> logistica <- function( b0 , b1 , x ){ 1/(1+exp(-(b0+b1*x))) }
```

```
> curve(logistica(b0=-5.3095, b1=0.1109, x), from=20, to=70, col="blue", add=TRUE)
```



## Exemplo: ajustamento do modelo (cont.)

### Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Ajustar o modelo com base nos dados tabelados:

```
> glm( cbind(DAC,nobs-DAC) ~ idade , family=binomial, data=HL.tab)
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC,nobs-DAC)~idade, family=binomial, data=HL.tab)
```

```
Coefficients:
```

```
(Intercept)      idade  
   -5.091         0.105          <---- parâmetros estimados
```

A equação da logística ajustada é:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 x)}} = \frac{1}{1 + e^{-(-5.091 + 0.105x)}}$$

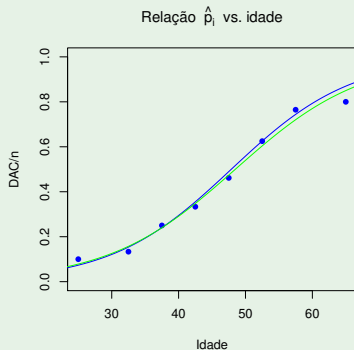
**Nota:** A pequena discrepância em relação ao ajustamento anterior resulta do agrupamento em classes de idade: os dados são diferentes.

## Exemplo: ajustamento do modelo (cont.)

### Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

Sobrepondo a logística ajustada ao gráfico dos  $\hat{p}_i$  vs. idade (e à curva ajustada antes):

```
> curve(logistica(b0=-5.091, b1=0.105, x), from=20, to=70, col="green", add=TRUE)
```



## O resultado do comando `glm`

Tal como o comando `lm`, também o comando `glm` produz uma *list*. Nas componentes dessa lista há informação sobre o ajustamento.

```
> HLtab.glm <- glm(cbind(DAC,nobs-DAC)~idade,family=binomial,data=HL.tab)
> names(HLtab.glm)
```

```
[1] "coefficients"      "residuals"          "fitted.values"      "effects"
[5] "R"                 "rank"                "qr"                  "family"
[9] "linear.predictors" "deviance"            "aic"                  "null.deviance"
[13] "iter"              "weights"             "prior.weights"       "df.residual"
[17] "df.null"           "y"                    "converged"           "boundary"
[21] "model"             "call"                 "formula"              "terms"
[25] "data"              "offset"               "control"              "method"
[29] "contrasts"         "xlevels"
```

Para aprofundar cada componente consultar: `help(glm)`

Para invocar uma componente usa-se a referência usual de listas:

## Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> HLtab.glm$coef
```

```
(Intercept)      idade
-5.0907332      0.1050191
```

## O comando `coef`

Como para os Modelos Lineares, existem comandos que facilitam a extração de informação dum ajustamento de MLG. Eis algumas:

`coef` – devolve um vector com os valores estimados dos parâmetros  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ , ou seja, com os valores  $b_0, b_1, \dots, b_p$ :

### Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> HL.glm <- glm(DAC ~ Idade, family=binomial, data=HL)
> coef(HL.glm)
```

(Intercept)	idade
-5.3094534	0.1109211



# O comando `predict`

`predict` – por omissão, devolve os valores da combinação linear estimada dos preditores usados no ajustamento, ou seja, da componente sistemática  $b_0 + b_1x_{1(i)} + \dots + b_px_{p(i)}$ .

## Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> predict(HLtab.glm)
```

```
 [20,30[  [30,35[  [35,40[  [40,45[  [45,50[  [50,55[  [55,60[  [60,70[  
-2.4652550 -1.6776115 -1.1525158 -0.6274202 -0.1023245  0.4227711  0.9478668  1.7355102
```

```
> predict(HL.glm)
```

```
      1      2      3      4      5      6      7  
-3.09103053 -2.75826710 -2.64734596 -2.53642482 -2.53642482 -2.42550368 -2.42550368  
.....  
      99     100  
1.90042087 2.34410544
```

## O comando `predict` (cont.)

Pode também usar-se para estimar a combinação linear de valores *não* usados no ajustamento.

Os novos valores são dados numa *data frame* com nomes iguais aos usados nos dados originais.

### Dados Hosmer & Lemeshow (cont.)

```
> predict(HL.glm, newdata=data.frame(Idade=26))
```

```
      1  
-2.425504
```

```
> predict(HLtab.glm, newdata=data.frame(idade=c(26,53,74)))
```

```
      1          2          3  
-2.3602358  0.4752807  2.6806824
```

## O comando `fitted`

`fitted` – devolve os valores ajustados do valor esperado de  $Y_i$ , ou seja, de  $\hat{\mu}_i = g^{-1}(b_0 + b_1 x_{1(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})$ .

```
> fitted(HLtab.glm)
```

```
 [20,30[  [30,35[  [35,40[  [40,45[  [45,50[  [50,55[  [55,60[  [60,70[  
0.07833012 0.15741201 0.24002985 0.34809573 0.47444116 0.60414616 0.72068596 0.85011588
```

Resultado análogo é obtido com o comando `predict`, usando o argumento `type="response"`:

```
> predict(HLtab.glm, type="response")
```

```
 [20,30[  [30,35[  [35,40[  [40,45[  [45,50[  [50,55[  [55,60[  [60,70[  
0.07833012 0.15741201 0.24002985 0.34809573 0.47444116 0.60414616 0.72068596 0.85011588
```

Assim, pode-se estimar os valores de  $\hat{\mu}$  para novos valores dos preditores.

```
> predict(HLtab.glm, newdata=data.frame(idade=c(26,53,74)),type="response")
```

```
 1      2      3  
0.0862556 0.6166329 0.9358771
```

# Notas sobre a Regressão Logística

- A função logística tem boas propriedades para representar uma **probabilidade**: para *qualquer* valor da componente sistemática, a função logística

$$p(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p)}}$$

toma valores entre 0 e 1. O mesmo não acontece com uma relação linear  $p(x_1, \dots, x_p) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$ , que toma valores em  $\mathbb{R}$ .

- No caso de haver uma **única variável preditora quantitativa**, trocando os acontecimentos associados aos valores 0 e 1, uma função decrescente para  $p = P[Y = 1]$  transforma-se numa função crescente.

# Mais notas sobre a regressão logística

No caso de haver uma única variável preditora quantitativa, o parâmetro  $\beta_1$  tem a seguinte interpretação:

- como

$$\frac{p(x)}{1-p(x)} = e^{\beta_0 + \beta_1 x} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x},$$

cada aumento de uma unidade na variável preditora  $X$  traduz-se num efeito multiplicativo sobre o *odds ratio*, de  $e^{\beta_1}$ :

$$\frac{p(x+1)}{1-p(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x} \cdot e^{\beta_1} = \frac{p(x)}{1-p(x)} \cdot e^{\beta_1}.$$

- o que é o mesmo que dizer que se traduz num efeito aditivo, de  $\beta_1$  unidades, sobre o *log-odds ratio*:

$$\log \left[ \frac{p(x+1)}{1-p(x+1)} \right] = \log \left[ \frac{p(x)}{1-p(x)} \right] + \beta_1.$$

# Mais notas sobre a Regressão Logística

Quando há **mais do que uma variável preditora quantitativa**:

- a função de ligação *logit* gera uma **relação logística** para a probabilidade de êxito  $p$ , como função dos valores da parte sistemática  $\eta$  (combinação linear das variáveis predictoras).
- a **interpretação dos coeficientes  $\beta_j$**  generaliza-se: um aumento de uma unidade na variável preditora  $j$  (mantendo as restantes constantes) traduz-se numa multiplicação do *odds ratio* por um factor  $e^{\beta_j}$ .

Para **preditores categóricos (factores)**,

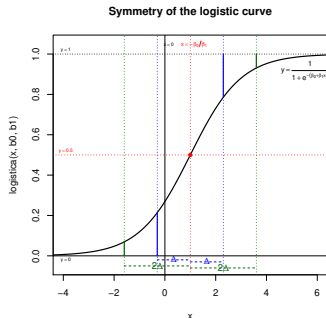
- seja  $\vec{\mathcal{I}}_j$  uma variável **indicatriz**. O correspondente parâmetro  $\beta_j$  indica o incremento no *log-odds ratio* resultante de uma observação passar a pertencer à categoria de que  $\vec{\mathcal{I}}_j$  é indicatriz.

# Características da curva logística

A relação logística pode ser demasiado rígida. Com um único preditor numérico, a logística  $f(x) = \left[1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}\right]^{-1}$  tem um ponto de inflexão associado à probabilidade  $p = 0.5$ , em torno do qual há simetria da curva:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)} = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \Rightarrow f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1} - \Delta\right) = \frac{1}{1 + e^{\beta_1 \Delta}} = 1 - f\left(-\frac{\beta_0}{\beta_1} + \Delta\right)$$



# Estimação de parâmetros em MLGs

A estimação dos parâmetros  $\beta_j$  em Modelos Lineares Generalizados é feita pelo **Método da Máxima Verosimilhança**.

Assim, ao contrário do que acontece com o Modelo Linear, em MLGs **as hipóteses distribucionais são cruciais para a estimação dos parâmetros**.

O facto das distribuições consideradas em MLGs pertencerem à família exponencial de distribuições gera algumas particularidades na estimação.



# Verosimilhança na família exponencial

A função verosimilhança para  $n$  observações independentes  $y_1, y_2, \dots, y_n$  numa qualquer distribuição da família exponencial é:

$$\mathbf{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi} ; y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^n f(y_i; \theta_i, \phi_i) = e^{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]}$$

Maximizar a verosimilhança equivale a maximizar a log-verosimilhança:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi} ; y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]$$

Onde estão os parâmetros do modelo,  $\beta_j$ ?

# Máxima Verosimilhança em MLGs

Num MLG, a componente sistemática e o valor esperado da variável resposta estão relacionados por  $g(E[Y]) = \vec{x}^t \vec{\beta}$ .

No caso de uma **função de ligação canónica** tem-se  $\theta = \vec{x}^t \vec{\beta}$ .

Em geral, **pode escrever-se a log-verosimilhança como função dos parâmetros do modelo,  $\mathcal{L}(\vec{\beta})$** , e os  $\beta_j$ s estão associados ao parâmetro natural  $\theta$ .

Estimar os parâmetros pelo método da máxima verosimilhança consiste em escolher o vector  $\vec{\beta}$  que torne máxima a função de log-verosimilhança  $\mathcal{L}(\vec{\beta})$ .

**NOTA:** Para já, admite-se conhecido o parâmetro de dispersão  $\phi$ , como no caso da Bernoulli e 'Binomial/n'.

## Máxima Verosimilhança em MLGs (cont.)

A maximização da função de  $p+1$  variáveis  $\mathcal{L}(\vec{\beta})$  tem como condição necessária:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = 0, \quad \forall j = 0 : p$$

Admite-se que as funções  $a(\cdot)$ ,  $b(\cdot)$  e  $c(\cdot)$  são suficientemente regulares para que as operações envolvidas estejam bem definidas.

No caso de um Modelo Linear Generalizado genérico, não existe a garantia de que haja máximo desta função log-verosimilhança (para valores admissíveis dos parâmetros  $\vec{\beta}$ ), nem que, existindo máximo, este seja único.

Nos casos concretos abordados nesta disciplina, a situação não cria dificuldades.

## Exemplo: o caso da Regressão Logística

No Modelo de Regressão Logística, as  $n$  observações independentes referem-se a uma variável aleatória com distribuição de Bernoulli.

A sua função verosimilhança é dada por:

$$L(\vec{p}; \vec{y}) = \prod_{i=1}^n e^{\ln(1-p_i) + y_i \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right)}$$

e a log-verosimilhança por:

$$\mathcal{L}(\vec{p}; \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \left[ \ln(1-p_i) + y_i \ln\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) \right]$$

Como a função de ligação é  $g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) = \vec{x}^t \vec{\beta}$ , a log-verosimilhança é função dos parâmetros  $\vec{\beta}$ :

$$\mathcal{L}(\vec{\beta}; \vec{y}) = \sum_{i=1}^n \left[ -\ln\left(1 + e^{\vec{x}_i^t \vec{\beta}}\right) + y_i \vec{x}_i^t \vec{\beta} \right]$$

# Estimação na Regressão Logística (cont.)

Tem-se:

$$\mathcal{L}(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left( \beta_0 y_i + \sum_{k=1}^p y_i x_{k(i)} \beta_k \right) - \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + e^{\beta_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \beta_k} \right)$$

Condição necessária para a existência de extremo da log-verosimilhança no ponto  $\vec{\beta} = \vec{\hat{\beta}}$  é que:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}})}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n y_i x_{j(i)} - \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \sum_{k=1}^p x_{k(i)} \hat{\beta}_k}} \cdot x_{j(i)} = 0 \quad \forall j = 1 : p \end{cases}$$

Estas  $p+1$  equações normais formam um **sistema não-linear** de equações nas  $p+1$  incógnitas  $\hat{\beta}_j$  ( $j = 0 : p$ ).

# Algoritmos de estimação

Em geral, o sistema de  $p+1$  equações normais associado à maximização da função de log-verosimilhança num Modelo Linear generalizado é um sistema não-linear:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\vec{\beta})}{\partial \beta_j} = 0 \quad , \quad \forall j = 0 : p.$$

Algoritmos numéricos de resolução utilizados no contexto de MLGs são **adaptações do algoritmo de Newton-Raphson**, conhecidos por vários nomes: Método Iterativo de Mínimos Quadrados Ponderados (**Iterative Weighted Least Squares**, IWLS) ou Re-ponderados (or **Reweighted**, IRLS), ou ainda Método de Fisher (**Fisher Scoring Method**).

O **Método de Newton-Raphson** trabalha com uma **aproximação de segunda ordem** (fórmula de Taylor) da **função log-verosimilhança**, com desenvolvimento em torno duma estimativa inicial do vector  $\vec{\beta}$ .

# Algoritmos de estimação (cont.)

## Método de Newton-Raphson

Sejam:

- $\vec{\beta}^{[0]}$ , uma **solução inicial** para  $\vec{\beta}$ ;
- $\vec{\nabla} \mathcal{L}_{\vec{\beta}}$  o **vector gradiente** de  $\mathcal{L}$  (vector das derivadas parciais  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_j}$ ) em  $\vec{\beta}$ ;
- $\mathcal{H}_{\vec{\beta}}$  a **matriz Hessiana** das segundas derivadas parciais da função  $\mathcal{L}(\cdot)$ , cujo elemento  $(j, m)$  é:

$$\left(\mathcal{H}_{\vec{\beta}}\right)_{(j,m)} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \beta_j \partial \beta_m}$$

Tem-se a aproximação de 2a. ordem dada pela **fórmula de Taylor**:

$$\mathcal{L}(\vec{\beta}) \approx \mathcal{L}_*(\vec{\beta}) = \mathcal{L}(\vec{\beta}^{[0]}) + (\vec{\nabla} \mathcal{L}_{\vec{\beta}^{[0]}})^t (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]}) + \frac{1}{2} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]})^t \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]})$$

Em vez de maximizar  $\mathcal{L}(\vec{\beta})$ , maximiza-se a aproximação  $\mathcal{L}_*(\vec{\beta})$ .

## Algoritmos de estimação (cont.)

O cálculo do vector gradiente é simples para produtos internos ou formas quadráticas:

$$\text{Se } h(\vec{x}) = \vec{a}^t \vec{x} \text{ , tem-se } \frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{a}^t \vec{x})}{\partial \vec{x}} = \vec{a}.$$

$$\text{Se } h(\vec{x}) = \vec{x}^t \mathbf{A} \vec{x} \text{ , tem-se } \frac{\partial h(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{x}^t \mathbf{A} \vec{x})}{\partial \vec{x}} = 2\mathbf{A}\vec{x}.$$

Assim,

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}} = \overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[0]}} + \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}} (\vec{\beta} - \vec{\beta}^{[0]}).$$

Admitindo a invertibilidade de  $\mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}}$ , tem-se:

$$\overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\beta}^{[0]} - \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[0]}}^{-1} \cdot \overrightarrow{\nabla \mathcal{L}}_{\vec{\beta}^{[0]}}.$$

O algoritmo Newton-Raphson itera esta relação.



# Algoritmos de estimação (cont.)

Tome-se:

$$\vec{\beta}^{[i+1]} = \vec{\beta}^{[i]} - \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[i]}}^{-1} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{L}_{\vec{\beta}^{[i]}}$$

Notas:

- A possibilidade de aplicar com êxito este algoritmo exige a **existência e invertibilidade das matrizes Hessianas** de  $\mathcal{L}$  nos sucessivos pontos  $\vec{\beta}^{[i]}$ ;
- Não está garantida a convergência do algoritmo, mesmo quando existe e é único o máximo da função log-verosimilhança;
- Caso exista um único máximo, a convergência é tanto melhor quanto mais próximo  $\vec{\beta}^{[0]}$  estiver do máximo.
- Podem existir **vários máximos locais**, e uma má escolha inicial  $\vec{\beta}^{[0]}$  levar à convergência para uma **solução sub-ótima**.

# Algoritmos de estimação (cont.)

## Método de Fisher

O cálculo da matriz Hessiana da log-verosimilhança nos pontos  $\vec{\beta}^{[l]}$  é computacionalmente exigente.

O algoritmo de Fisher (Fisher Scoring Method) é uma modificação do algoritmo de Newton-Raphson, que substitui a matriz Hessiana pela matriz de informação de Fisher, definida como o simétrico da esperança da matriz Hessiana:

$$\mathbf{I}_{\vec{\beta}^{[l]}} = -E \left[ \mathcal{H}_{\vec{\beta}^{[l]}} \right]$$

Assim, a iteração que está na base do Algoritmo de Fisher é:

$$\vec{\beta}^{[i+1]} = \vec{\beta}^{[i]} + \mathbf{I}_{\vec{\beta}^{[i]}}^{-1} \cdot \overrightarrow{\nabla_{\vec{\beta}^{[i]}} \mathcal{L}}$$

## Algoritmos (cont.)

Quando se considera uma MLG com a função de ligação canónica, a matriz Hessiana da log-verosimilhança não depende da variável resposta  $Y$ , pelo que a Hessiana e o seu valor esperado coincidem.

Logo, neste caso os métodos de Fisher e Newton-Raphson coincidem.

Esta é uma das razões que confere às ligações canónicas a sua importância.

# A Regressão Probit

Outro exemplo de MLG é o **modelo probit** de Bliss (1935), muito frequente em Toxicologia.

## Modelo *Probit*

Tal como na Regressão Logística, tem-se:

- **variável resposta dicotómica** (com distribuição Bernoulli).
- **componente sistemática**, dada por uma combinação linear de variáveis preditoras.

**Diferente** da Regressão Logística é a **função de ligação**.

## A Regressão Probit (cont.)

Na Regressão Logística, a função de ligação exprime  $p = E[Y]$  como uma função logística da componente sistemática  $\eta = \vec{x}^t \vec{\beta}$ .

No Modelo *Probit*, a probabilidade de êxito e valor esperado,  $p = E[Y]$ , é dada por outra curva sigmóide, a função de distribuição cumulativa (f.d.c.),  $\Phi$ , duma Normal Reduzida:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = \Phi(\vec{x}^t \vec{\beta})$$

onde  $\Phi$  indica a f.d.c. duma  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Esta opção significa considerar como função de ligação a inversa da f.d.c. duma Normal reduzida, ou seja,  $g = \Phi^{-1}$ :

$$\vec{x}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p = g(E[Y]) = g(p(\vec{x})) = \Phi^{-1}(p(\vec{x})) .$$

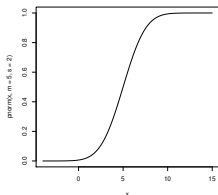
## A Regressão Probit (cont.)

No caso de haver **uma única variável preditora numérica**, tem-se:

$$p(x; \beta_0, \beta_1) = g^{-1}(\beta_0 + \beta_1 x) = \Phi(\beta_0 + \beta_1 x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

re-parametrizando com  $\beta_0 = -\frac{\mu}{\sigma}$  e  $\beta_1 = \frac{1}{\sigma}$ .

Assim, a probabilidade de êxito  $p$  relaciona-se com a variável preditora  $X$  através da f.d.c. dum  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , com  $\sigma = \frac{1}{\beta_1}$  e  $\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1}$ .



# A Regressão Probit em toxicologia

No contexto toxicológico, é frequente:

- existir uma **variável preditora  $X$**  que indica a **dosagem** (ou **log-dosagem**) dum determinado produto tóxico;
- para cada individuo há um **nível de tolerância  $t$** : a dosagem acima do qual o produto tóxico provoca a morte do indivíduo;
- esse nível de tolerância **varia entre indivíduos** e pode ser **representado por uma variável aleatória  $T$** .

Definindo a variável aleatória binária  $Y$ :

$$Y = \begin{cases} 1 & , \text{ individuo morre} \\ 0 & , \text{ individuo sobrevive} \end{cases}$$

Tem-se a relação entre  $Y$  e a tolerância  $T$ :

$$P[Y = 1 | x] = P[T \leq x] = p(x)$$

## A Regressão Probit em toxicologia (cont.)

$$P[Y = 1 | x] = P[T \leq x] = p(x)$$

Admitindo que a tolerância  $T$  segue uma distribuição  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ,

$$p(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Tem-se o Modelo Probit com  $X$  como única variável preditora.

Como  $\beta_0 = -\frac{\mu}{\sigma}$  e  $\beta_1 = \frac{1}{\sigma}$  (slide 62), os parâmetros da distribuição da tolerância  $T$  são dados por:

$$\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{1}{\beta_1}.$$



# Regressão Probit no

Ajustemos uma Regressão Probit, no R, aos dados do exemplo DAC:

## Dados Hosmer & Lemeshow

Há que especificar a função de ligação, como opção do argumento `family`:

```
> glm(cbind(DAC,nobs-DAC)~idade,family=binomial(link=probit),data=HL.tab)
```

```
Call:  glm(formula = cbind(DAC, nobs - DAC) ~ idade,
           family = binomial(link = probit), data = HL.tab)
```

Coefficients:

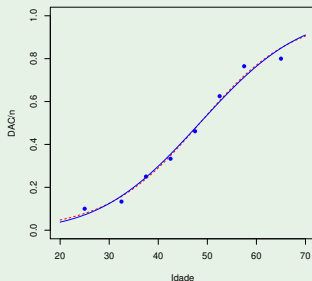
(Intercept)	idade
-3.0245	0.0624

[...]

Tal como na Regressão Logística, a variável resposta pode ser uma matriz de duas colunas, indicando o número de “êxitos” e o número de “fracassos” (como acima) ou, alternativamente, como um vector de zeros e uns.

## Regressão Probit no (cont.)

A curva ajustada de probabilidade de DAC sobre idade ( $x$ ), tem equação:  
 $p(x) = \Phi(-3.0245 + 0.0624x)$ . Eis a curva, sobreposta à nuvem de pontos (a tracejado tem-se a curva logística ajustada):



A curva foi traçada com o seguinte comando:

```
> curve(pnorm(-3.0245+0.0624*x), add=TRUE, col="blue")
```

## O comando `update`

O modelo *probit* agora ajustado apenas difere, em relação ao modelo de regressão logística (`HLtab.glm`), no argumento `family`, onde se especifica a função de ligação.

O comando do R `update` é útil nestes casos, pois permite re-ajustar um modelo alterando argumentos.

```
> update(HLtab.glm, family=binomial(link=probit))
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC,nobs-DAC)~idade, family=binomial(link=probit), data=HL.tab)
Coefficients:
 (Intercept)      idade
    -3.0245      0.0624
Degrees of Freedom: 7 Total (i.e. Null); 6 Residual
Null Deviance:    28.7
Residual Deviance: 0.6529  AIC: 25.79
```

**NOTA:** O objecto `HLtab.glm` não foi alterado. E o novo modelo não foi guardado.

## A Regressão Probit (cont.)

Para qualquer número de variáveis preditoras, a probabilidade de êxito  $p = P[Y = 1]$  é dada, no Modelo Probit, por uma função cujo comportamento é muito semelhante ao do Modelo Logit:

- função estritamente crescente,
- um único ponto de inflexão, quando o preditor linear é nulo:  $\mathbf{x}^t \vec{\beta} = 0$ ,
- a que corresponde uma probabilidade de êxito  $p(0) = 0.5$ .
- com simetria em torno do ponto de inflexão, isto é,  $p(-\eta) = 1 - p(\eta)$ , para qualquer  $\eta$ .

Inconvenientes:

- não há interpretação fácil do significado dos parâmetros  $\beta_j$ ;
- a função de ligação é não-canónica.

# O modelo log-log do complementar

## Modelo log-log do complementar

No mesmo contexto de **variável resposta dicotómica**  $Y$ , outra escolha frequente de **função de ligação**, com tradição histórica desde 1922 no estudo de organismos infecciosos consiste em tomar para probabilidade de êxito ( $Y = 1$ ) a função:

$$p(\vec{x}) = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = 1 - e^{-e^{\vec{x}^t \vec{\beta}}}$$

O **contradomínio** da função agora definida é o intervalo  $]0, 1[$ .

A função de ligação será, neste caso, da forma:

$$\vec{x}^t \vec{\beta} = g(p(\vec{x})) = \ln[-\ln(1 - p(\vec{x}))]$$

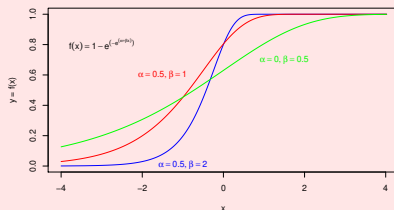
donde a designação **log-log do complementar**.

## O modelo log-log do complementar (cont.)

No caso de um único preditor numérico, a função  $p$  é a diferença para 1 duma curva de Gompertz ( $y = \alpha e^{-\beta e^{-\gamma x}}$ ) com valor assintótico  $\alpha = 1$ :

$$p(x) = 1 - e^{-\beta e^{-\gamma x}}.$$

Assim, a função  $p(x)$  está associada à função distribuição cumulativa da distribuição de Gumbel:



## O modelo log-log do complementar (cont.)

Esta função para  $p$  tem analogias e diferenças de comportamento em relação aos Modelos Logit e Probit:

- é igualmente **estritamente monótona**;
- tem igualmente **um único ponto de inflexão**, quando  $\eta = 0$ ;
- mas **o valor de probabilidade associado** já não se encontra a meio caminho na escala de probabilidades, sendo  $p(0) = 1 - \frac{1}{e}$ ;
- isso significa que a “fase inicial” da curva de probabilidades decorre até um valor superior da probabilidade ( $1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$ ) do que nas Regressões *Logit* e *Probit*.

Tal como no Modelo Probit (e ao contrário da Regressão Logística) **os coeficientes  $\beta_j$  da componente sistemática não têm um significado facilmente interpretável**.

## Log-log do complementar no

Ajustar o modelo com função de ligação log-log do complementar faz-se especificando o valor `cloglog` no argumento `link`.

```
> update(HLtab.glm, family=binomial(link=cloglog))
```

```
Call: glm(formula=cbind(DAC, nobs-DAC)~idade,  
          family=binomial(link=cloglog), data=HL.tab)
```

Coefficients:

```
(Intercept)      idade  
   -4.00470      0.07311  
[...]
```

A curva ajustada é:

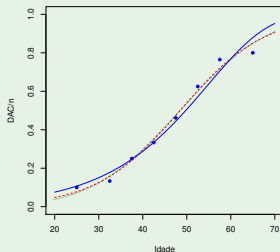
$$p(x) = 1 - e^{-e^{-4.00470 + 0.07311x}}$$



## Log-log do complementar no $\mathbb{R}$ (cont.)

A curva ajustada, sobreposta à nuvem de pontos do exemplo DAC, é

$$p(x) = 1 - e^{-e^{-4.00470+0.07311x}}$$



A tracejado, no gráfico, a curva do modelo `probit` e a pontilhada a da regressão logística. A nova curva foi traçada com os seguintes comandos:

```
> cloglog <- function( b0,b1,x ){1-exp(-exp(b0+b1*x))}  
> curve(cloglog(b0=-4.0047,b1=0.07311,x), add=TRUE, col="blue")
```

# Outras funções de ligação para respostas binárias

Foram consideradas três funções de ligação em modelos de resposta Bernoulli (ou Binomial/ $n$ ), cujas inversas são **sigmóides**. Em dois casos, usaram-se inversas de **funções de distribuição cumulativas**:

- f.d.c. duma Normal reduzida, no Modelo Probit;
- f.d.c. duma Gumbel, no Modelo log-log do Complementar

Uma **generalização óbvia** consiste em utilizar **outra f.d.c. duma variável aleatória contínua**, gerando novos MLGs de resposta dicotómica.

No R, além das opções acima referidas, pode usar-se uma **f.d.c. da distribuição de Cauchy** (`link=cauchit`).

# Inferência: propriedades dos estimadores MV

## Propriedades de estimadores de Máxima Verosimilhança

Quaisquer estimadores  $\vec{\beta}$  de máxima verosimilhança são:

- assintoticamente multinormais
- assintoticamente centrados ( $E[\vec{\beta}] \rightarrow \vec{\beta}$ ).
- assintoticamente de matriz de variâncias-covariâncias  $\mathbb{I}_{\vec{\beta}}^{-1}$ , onde

$$\mathbb{I}_{\vec{\beta}} = -E[\mathcal{H}_{\vec{\beta}}]$$

é a **matriz de Informação de Fisher**, sendo  $\mathcal{H}_{\vec{\beta}}$  a matriz Hessiana da log-verosimilhança  $\mathcal{L}$ , no ponto  $\vec{\beta}$

**Conclusão:** Pode fazer-se inferência (assintótica) em MLGs!

# Inferência em MLGs

## Distribuição assintótica de $\vec{\hat{\beta}}$ num MLG

Num Modelo Linear Generalizado, o vector de estimadores de Máxima Verosimilhança,  $\vec{\hat{\beta}}$ , verifica **assintoticamente**:

$$\vec{\hat{\beta}} \sim \mathcal{N}_{p+1} \left( \vec{\beta}, \mathbf{I}_{\vec{\beta}}^{-1} \right)$$

onde  $\mathbf{I}_{\vec{\beta}}$  é a matriz de informação de Fisher da log-verosimilhança da amostra, calculada no ponto  $\vec{\beta}$ .

A **dimensão da amostra** tem uma importância grande para garantir a fiabilidade da aproximação assintótica.

Repare-se na **semelhança** com o resultado distribucional que serve de base à inferência num **modelo linear**. As propriedades da Multinormal podem ser usadas para obter resultados análogos.

# Inferência em MLGs (cont.)

## Distribuição para combinações lineares dos parâmetros

Dado um MLG (admitindo certas condições de regularidade) e um vector não-aleatório  $\mathbf{a}_{p+1}$ , os estimadores de Máxima Verosimilhança  $\vec{\beta}$  verificam, **assintoticamente**:

$$\frac{\vec{\mathbf{a}}^t \vec{\beta} - \vec{\mathbf{a}}^t \vec{\beta}}{\sqrt{\vec{\mathbf{a}}^t \mathbf{\Pi}_{\beta}^{-1} \vec{\mathbf{a}}}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

O Teorema permite obter intervalos de confiança e testes de hipóteses (aproximados) para combinações lineares dos parâmetros  $\vec{\beta}$ .

## Inferência em MLGs (cont.)

Na expressão que serve de base aos ICs e Testes de Hipóteses surge a inversa da matriz de informação no **ponto desconhecido**  $\vec{\beta}$ .

Essa matriz desconhecida é substituída por outra, conhecida: a matriz de informação calculada para a **estimativa**  $\vec{\beta}$ .

Para distribuições com parâmetro de dispersão  $\phi$  desconhecido, existe ainda o **problema (ainda não considerado)** da estimação de  $\phi$ .

Tudo isto reforça a conveniência de **grandes amostras** para que se possa confiar nos resultados.

## Inferência em MLGs (cont.)

### Intervalos de Confiança (assintóticos) para $\vec{a}^t \vec{\beta}$

Um intervalo assintótico a  $(1 - \alpha) \times 100\%$  de confiança para a combinação linear  $\vec{a}^t \vec{\beta}$  é dado por:

$$\left] \vec{a}^t \vec{b} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbf{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \quad , \quad \vec{a}^t \vec{b} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbf{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \quad \left[$$

sendo  $\mathbf{I}_{\hat{\beta}}^{-1}$  a inversa da matriz de informação de Fisher da log-verosimilhança, calculada no ponto  $\vec{\beta}$ .

### Intervalos de Confiança (assintóticos) para $\beta_j$

$$\left] b_j - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\left(\mathbf{I}_{\hat{\beta}}^{-1}\right)_{[j+1,j+1]}} \quad , \quad b_j + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\left(\mathbf{I}_{\hat{\beta}}^{-1}\right)_{[j+1,j+1]}} \quad \left[$$

# Inferência em MLGs (cont.)

## Teste de Hipóteses (assintótico)

Teste de hipóteses (assintótico) bilateral a uma combinação linear dos  $\beta_j$ :

- Hipóteses:

$$H_0 : \vec{a}^t \vec{\beta} = c \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vec{a}^t \vec{\beta} \neq c$$

- Estatística do Teste:

$$Z = \frac{\vec{a}^t \vec{\hat{\beta}} - \vec{a}^t \vec{\beta}_{|H_0}}{\sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\vec{\beta}}^{-1} \vec{a}}} \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

- Região Crítica: Bilateral. Rejeitar  $H_0$  se  $|Z_{calc}| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ .

Definem-se testes unilaterais, com hipóteses e RCs análogas às do modelo linear.



## A função `summary`

A função `summary` tem método para MLGs, gerando resultados análogos aos de modelos lineares.

A tabela `Coefficients` tem colunas análogas:

- `Estimate` – valores estimados dos parâmetros  $\beta_j$ ;
- `Std. Error` – os respectivos desvios padrão estimados,  $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}$ , i.e., as raízes quadradas dos elementos diagonais da matriz  $\mathcal{J}_{\hat{\beta}}^{-1}$ ;
- `z value` – o valor calculado da estatística  $Z = \frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}$ , para um teste às hipóteses  $H_0 : \beta_j = 0$  vs.  $H_1 : \beta_j \neq 0$ ;
- `Pr(>|z|)` – o *p-value* (bilateral) da estatística da coluna anterior (calculado numa  $\mathcal{N}(0, 1)$ ).

O teste referido pode servir para determinar a dispensabilidade de algum preditor.

Na listagem do comando `summary` tem-se a informação fundamental para construir ICs ou Testes a parâmetros, num MLG.

```
> summary(HLtab.glm)
```

```
Call:
glm(formula=cbind(DAC, n-DAC) ~ idade, family=binomial, data=HL.tab)
Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -5.09073    1.09753  -4.638 3.51e-06 ***
Idade         0.10502    0.02308   4.551 5.35e-06 ***
[...]
```

Number of Fisher Scoring iterations: 4      <-- no. passos do algoritmo

# A matriz de covariâncias dos estimadores no

O comando `vcov` devolve a matriz de (co-)variâncias dos estimadores  $\vec{\beta}$ , ou seja, a inversa da matriz de informação de Fisher,  $\mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1}$ .

```
> vcov(HLtab.glm)
      (Intercept)      idade
(Intercept)  1.20457613 -0.0247424726
idade       -0.02474247  0.0005325726
```

Esta é a matriz usada para construir um intervalo assintótico a  $(1-\alpha) \times 100\%$  de confiança para a combinação linear  $\vec{a}^t \vec{\beta}$ :

$$\left[ \vec{a}^t \vec{b} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \quad , \quad \vec{a}^t \vec{b} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\vec{a}^t \mathbb{I}_{\hat{\beta}}^{-1} \vec{a}} \right]$$

## Intervalos de confiança para $\beta_j$ no

Intervalos de confiança (assintóticos) para os parâmetros individuais  $\beta_j$  são dados pela função `confint.default`.

```
> confint.default(HLtab.glm)
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -7.24185609 -2.9396103
idade        0.05978799  0.1502503
```

Venables & Ripley disponibilizam no módulo MASS um método alternativo (computacionalmente mais exigente) de construir intervalos de confiança em MLGs, denominado *profiling*. É automaticamente invocado pela função `confint`:

```
> confint(HLtab.glm)
Waiting for profiling to be done...
                2.5 %      97.5 %
(Intercept) -7.42548805 -3.0887956
idade        0.06276942  0.1539715
```

## Exemplo: Exercício 1

Consideremos MLGs que misturam preditores numéricos e factores.

### Exemplo: larva do tabaco (Venables & Ripley)

Um estudo da resistência da larva do tabaco (tobacco budworm) *heliathis virescens* a doses duma substância tóxica.



Lotes de 20 traças de cada sexo foram expostas a doses da referida substância (em  $\mu\text{g}$ ). Ao fim de 3 dias registou-se o número de indivíduos mortos em cada lote. Os resultados estão na seguinte tabela.

Sexo	Dose					
	1	2	4	8	16	32
Machos	1	4	9	13	18	20
Fêmeas	0	2	6	10	12	16

Trata-se de dados com **variável resposta Binomial** (número de mortes em  $n = 20 \times 12 = 240$  larvas expostas ao tóxico).

# Um exemplo de MLG (cont.)

## Exemplo: larva do tabaco

Criação de *data frame* `tabaco` com os dados:

```
> morte <- c(1,4,9,13,18,20,0,2,6,10,12,16)
> sexo <- factor(rep(c("macho", "femea"), c(6,6)))
> dose <- rep(2^(0:5), 2)
> tabaco <- data.frame(morte, sexo, dose)
> tabaco
```

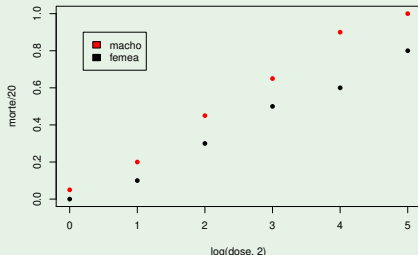
```
   morte sexo dose
1      1 macho  1
2      4 macho  2
3      9 macho  4
4     13 macho  8
5     18 macho 16
6     20 macho 32
7      0 femea  1
8      2 femea  2
9      6 femea  4
10     10 femea  8
11     12 femea 16
12     16 femea 32
```

É frequente em toxicologia usar uma transformação logaritmica (na base 2) de doses que vão sendo duplicadas.

# Exercício 1

## Exemplo: larva do tabaco

```
> plot(morte/20 ~ log(dose,2),data=tabaco,col=as.numeric(sexo),pch=16)  
> legend(0.2,0.9,legend=c("macho","femea"), fill=c("red","black"))
```



Embora uma relação linear pareça adequada, uma relação sigmóide é estruturalmente mais adequada, por apenas tomar valores em  $]0, 1[$ .

## Exercício 1 no R (cont.)

Para ajustar uma Regressão Probit, utiliza-se a opção `link=probit` na definição do argumento `family`.

### Exemplo: larva do tabaco

```
> glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2),  
+     family=binomial(link=probit), data=tabaco)
```

```
Call: glm(formula = cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2),  
+        family = binomial(link = probit), data = tabaco)
```

Coefficients:

```
(Intercept)  log(dose, 2)  
-1.6431      0.5966
```

Degrees of Freedom: 11 Total (i.e. Null); 10 Residual

Null Deviance: 124.9

Residual Deviance: 16.41 AIC: 50.52

A relação estimada é:  $p(x) = \Phi(-1.6431 + 0.5966 \log_2(x))$ , sendo  $x$  a dose.

- **Desvio** do modelo é indicado por **Residual Deviance** (16.41, no nosso caso).
- **Desvio do Modelo Nulo** é indicado por **Null Deviance** (124.9, no nosso caso).

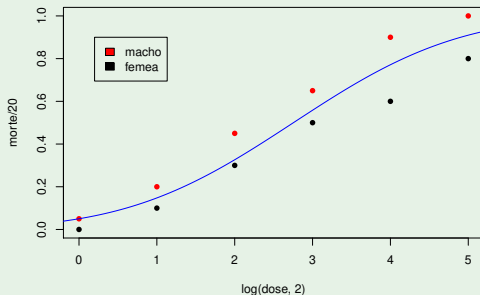


# Exercício 1 no R (cont.)

## Exemplo: larva do tabaco

Sobreposição da curva ajustada à nuvem de pontos, com o comando:

```
> curve(pnorm(-1.6431+0.5966*x), from=-1, to=6, col="blue", add=TRUE)
```



# Interpretação toxicológica

## Larva do tabaco

Em logaritmos de base 2, as dosagens ensaiadas foram 0, 1, 2, 3, 4, 5.

No contexto toxicológico, podemos afirmar (slide 64) que a tolerância face à dosagem segue uma distribuição  $T \sim \mathcal{N}\left(\mu = -\frac{\beta_0}{\beta_1}, \sigma^2 = \frac{1}{\beta_1^2}\right)$ .

Com os valores estimados, temos  $\hat{\mu} = \frac{1.6431}{0.5966} = 2.754107$  e  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{0.5966^2} = 2.8096$ .

Logo, a tolerância à dosagem (em logaritmos de base 2) tem distribuição:

$$T \sim \mathcal{N}(2.7541, \underbrace{2.8096}_{=\hat{\sigma}^2}).$$

# MLGs para variáveis resposta de Poisson

Consideremos agora modelos em que a componente aleatória  $Y$  tem **distribuição de Poisson**.

A distribuição de Poisson é frequente na **contagem de acontecimentos aleatórios** raros (quando se pode admitir que não há acontecimentos simultâneos).

Se  $Y$  tem distribuição de Poisson, **toma valores em  $\mathbb{N}_0$**  com probabilidades  $P[Y = y] = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$ , para  $\lambda > 0$ .

Esta distribuição **não é indicada para situações em que seja fixado à partida o número máximo de observações ou realizações do fenómeno**, como sucede com uma Binomial.

# A Poisson na família exponencial

Uma variável aleatória **discreta** tem **distribuição de Poisson** se tem função de massa probabilística  $P[Y = y] = \frac{\lambda^y}{y!} e^{-\lambda}$ , para  $y \in \mathbb{N}_0$ .

Pode re-escrever-se a função de massa probabilística duma Poisson como:

$$f(y|\lambda) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\ln(\lambda^y/y!)} = e^{-\lambda + \ln(\lambda^y) - \ln(y!)} = e^{-\lambda + y \ln(\lambda) - \ln(y!)}$$

que é da família exponencial  $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$ , com:

- $\theta = \ln(\lambda)$
- $\phi = 1$
- $b(\theta) = e^\theta = \lambda$
- $a(\phi) = 1$
- $c(y, \phi) = -\ln(y!)$

## Funções de ligação e ligação canónica

O valor esperado de  $Y \sim Po(\lambda)$  é o parâmetro  $\lambda = E[Y]$ .

Uma função de ligação será uma função  $g(\cdot)$  tal que:

$$g(E[Y]) = g(\lambda) = \vec{x}^t \vec{\beta},$$

onde  $\vec{x}^t \vec{\beta}$  é a componente sistemática do Modelo.

O parâmetro natural da distribuição de Poisson é  $\theta = \ln(\lambda)$ .

Assim, a função de ligação canónica para uma componente aleatória com distribuição de Poisson é a função de ligação logarítmica:

$$g(\lambda) = \ln(\lambda) = \vec{x}^t \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = e^{\vec{x}^t \vec{\beta}}$$

Um Modelo assim definido designa-se um **Modelo Log-Linear**.

# Modelos log-lineares

## Modelos Log-lineares

São modelos com:

- componente aleatória de Poisson;
- função de ligação logaritmo natural, que é a ligação canónica para as Poisson.

Nestes modelos, o valor esperado da variável resposta Poisson é dado por:

$$\lambda = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p}$$

**Nota:** a ligação apenas permite valores positivos do parâmetro  $\lambda$ , o que está estruturalmente de acordo com as características do parâmetro  $\lambda$  duma distribuição Poisson.

# Interpretação dos parâmetros $\beta_j$

No caso de haver **uma única variável preditora**  $X$ , a relação entre o parâmetro  $\lambda = E[Y]$  da distribuição Poisson e o preditor fica:

$$\lambda(x) = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x}$$

O aumento de uma unidade no valor do preditor multiplica o valor esperado da variável resposta por  $e^{\beta_1}$ :

$$\lambda(x+1) = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1(x+1)} = e^{\beta_0} \cdot e^{\beta_1 x} \cdot e^{\beta_1} = \lambda(x) \cdot e^{\beta_1}.$$

A interpretação **generaliza-se** para **mais do que uma variável preditora**. Com  $p$  variáveis predictoras tem-se:

$$\lambda(x) = e^{\beta_0} e^{\beta_1 x_1} e^{\beta_2 x_2} \dots e^{\beta_p x_p}.$$

Um aumento de uma unidade no valor do preditor  $X_j$ , **mantendo as restantes variáveis predictoras constantes**, multiplica o valor esperado de  $Y$  por  $e^{\beta_j}$ .

# Factores preditores e tabelas de contingência

No caso de uma variável **indicatriz**  $X_j$ , tem-se que a pertença à categoria assinalada pela indicatriz  $X_j$  multiplica o parâmetro  $\lambda$  da distribuição de Poisson por  $e^{\beta_j}$ .

Os **modelos log-lineares** têm **grande importância no estudo de tabelas de contingência**, cujas margens correspondem a diferentes factores e cujo recheio corresponde a contagens de observações nos cruzamentos de níveis correspondentes.

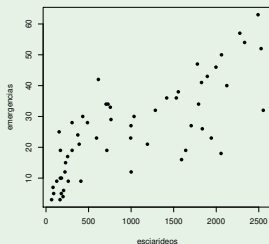
Tal como nos casos anteriores, **outras funções de ligação são concebíveis** para variáveis-resposta com distribuição de Poisson.



## Exemplo: Exercício 3 (Modelo Log-linear)

### Dados Elisa1 (emergencias de predador)

Quer-se modelar o número de **emergencias** ( $Y$ ) de adultos dum predador, em função do número de mosquitos (**esciarideos**,  $x$ ) no substrato de que se alimentam as larvas do predador. **Dados:** *data frame* **Elisa1**.



Há **crescimento curvilíneo** do número médio de **emergencias**.  
Se fôr crescimento **exponencial**, tem-se  $E[Y] = \gamma e^{\beta_1 x} = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$ .

## Exemplo: Exercício 3 (cont.)

### Dados Elisa1 (emergencias)

Admitindo  $Y$  com **distribuição Poisson**,  $E[Y] = \lambda$ . O crescimento exponencial de  $E[Y]$  em função de  $x$  é um modelo **log-linear** (canónico para Poisson):

$$\lambda = E[Y] = e^{\beta_0 + \beta_1 x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 x.$$

```
> Elisa1.glm <- glm(emergencias~esciarideos,family=poisson,data=Elisa1)
```

```
> summary(Elisa1.glm)
```

Coefficients:

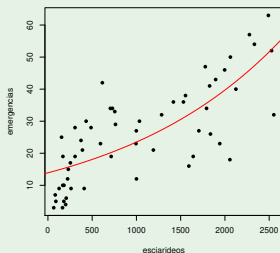
	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )	
(Intercept)	2.632e+00	5.076e-02	51.85	<2e-16	***
esciarideos	5.248e-04	3.209e-05	16.36	<2e-16	***
--					
(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)				<---	
[...]					

A curva ajustada é:  $\lambda = E[Y] = e^{b_0 + b_1 x} = e^{2.632 + 0.0005248 x}$

## Exemplo: Exercício 3 (cont.)

### Dados Elisa1 (emergências de predador)

Eis a curva ajustada  $\lambda = E[Y] = e^{b_0 + b_1 x} = e^{2.632 + 0.0005248 x}$  :



Por cada 100 esciarídeos a mais, o número médio de emergências é dado por:

$$\lambda_{x+100} = e^{100b_1} \times \lambda_x = e^{0.05248} \times \lambda_x = 1.053881 \times \lambda_x .$$

Por cada 100 esciarídeos a mais, o número médio de emergências aumenta  $\approx 5,4\%$ .

# Avaliação da qualidade dum MLG

Conceito importante na **avaliação da qualidade de um MLG** é o conceito de **Desvio** de um Modelo (*deviance* em inglês).

O desvio desempenha nos GLMs um papel análogo ao da Soma de Quadrados Residual nos Modelos Lineares.

No estudo do Modelo Linear foi introduzida a noção de **Modelo Nulo**: um Modelo **sem preditores** e onde toda a variação nos valores observados é variação residual, não explicada pelo Modelo.

No estudo de Modelos Lineares Generalizados é de utilidade um Modelo que ocupa **o extremo oposto na gama de possíveis modelos**: um **modelo saturado**, que tem **tantos parâmetros quantas as observações de  $Y$  disponíveis**.

## Modelo Nulo e modelo saturado (cont.)

Um modelo saturado ocupa o polo oposto em relação ao Modelo Nulo: enquanto que neste último tudo é variação residual, não explicada pelo modelo, num modelo saturado tudo é “explicado” pelo modelo, não havendo lugar a variação residual.

Num modelo saturado, o ajustamento é “perfeito”, mas inútil: a estimativa de cada valor esperado de  $Y$  coincide totalmente com o valor observado de  $Y$  correspondente, isto é,  $\hat{\mu}_i = \widehat{E}[Y_i] = Y_i$ .

Um tal ajustamento “perfeito” dos dados ao modelo saturado é ilusório. Mas é de utilidade como termo de comparação para medir o grau de ajustamento dum MLG a um conjunto de dados, medindo-se o afastamento em relação a este ajustamento “ideal”.

É nessa ideia que se baseia a definição do conceito de *Desvio* ou *Deviance*.

# Desvio

## Desvio (Deviance)

Considere-se um Modelo Linear Generalizado baseado em  $n$  observações independentes da variável resposta  $Y$ . Sejam:

- $\mathcal{L}_M$  a log-verosimilhança correspondente ao vector estimado  $\vec{\hat{\beta}}_M$  dos seus parâmetros (máxima com os dados observados);
- $\mathcal{L}_T$  a log-verosimilhança correspondente ao modelo saturado, isto é, a log-verosimilhança obtida substituindo cada valor esperado  $\mu_j$  pela observação correspondente  $y_j$ .

Define-se o **desvio** como sendo:

$$D^* = -2(\mathcal{L}_M - \mathcal{L}_T)$$

## Desvio (cont.)

Para uma distribuição da família exponencial de distribuições, tem-se:

$$\mathcal{L}(\vec{\theta}, \vec{\phi}) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{a(\phi_i)} + c(y_i, \phi_i) \right]$$

O desvio correspondente, **indicando** pelas letras M e T os estimadores associados ao parâmetro natural  $\theta$ , e **admitindo conhecido o parâmetro de dispersão**  $\phi$ , vem:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]}{a(\phi_i)} \right]$$

## Desvio (cont.)

As expressões para os desvios são mais simples caso o parâmetro de dispersão seja uma constante conhecida, que não exige estimação. É o caso das distribuições de Poisson e Bernoulli ou Binomial/ $n$ :

- $\phi = 1$  na Poisson;
- $\phi = 1$  na Bernoulli ou Binomial/ $n$ .

Para distribuições bi-paramétricas da família exponencial em que o parâmetro  $\phi$  não é conhecido,  $\phi$  tem de ser estimado a partir dos dados para se poder calcular o desvio. Isso complica a situação.



# Desvio numa Poisson

Vimos (slide 92) que se  $Y$  tem **distribuição de Poisson**:

$$\theta = \ln(\lambda) \quad ; \quad b(\theta) = e^\theta = \lambda \quad ; \quad \phi = a(\theta) = 1 .$$

No modelo saturado tem-se:  $\hat{\lambda}_i^T = y_i$ . No modelo ajustado, fica  $\hat{\lambda}_i^M = \hat{\lambda}_i$ .

Então a expressão geral do **desvio** (slide 103) será:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right]$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \left[ \ln(y_i) - \ln(\hat{\lambda}_i) \right] - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right\}$$

$$\Leftrightarrow D^* = 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right]$$

**Nota:** A expressão para  $\hat{\lambda}$  (logo, do Desvio) depende **também** da função de ligação usada.

## Exemplo: Exercício 3 (cont.)

### Dados Elisa1 (emergencias)

```
> Elisa1.glm <- glm(emergencias~esciarideos,family=poisson,data=Elisa1)
> summary(Elisa1.glm)
```

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	z value	Pr(> z )	
(Intercept)	2.632e+00	5.076e-02	51.85	<2e-16	***
esciarideos	5.248e-04	3.209e-05	16.36	<2e-16	***

--

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

Null deviance: 513.00 on 56 degrees of freedom <---

Residual deviance: 244.22 on 55 degrees of freedom <---

AIC: 526.32

O **Desvio** do modelo é a **Residual Deviance** (244.22, no nosso caso).

O **Desvio do Modelo Nulo** é a **Null Deviance** (513.00, no nosso caso).

# Comparação de modelos: Razão de verosimilhanças

Um teste à admissibilidade dum Submodelo é obtido com um resultado muito geral: o teste à razão de Verosimilhanças (Likelihood Ratio test).

Seja  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  uma amostra aleatória. Seja  $L(\vec{\theta}|\vec{Y})$  a sua verosimilhança, onde  $\vec{\theta}$  designa um vector de parâmetros. Sejam  $\Theta_0$  e  $\Theta_1$  dois conjuntos alternativos de condições sobre os valores dos parâmetros  $\theta$ .

No contexto dum Modelo Linear Generalizado com  $\phi$  conhecido, os parâmetros  $\theta$  são os  $p+1$  coeficientes  $\beta_j$  da combinação linear que constitui a componente sistemática do Modelo.

Sejam:

- $\Theta_0$  valores admissíveis com a restrição do submodelo:  $H_0 : \vec{\beta}_{\mathcal{S}} = \vec{0}$ .
- $\Theta_1$  indica-se a condição complementar:  $H_1 : \vec{\beta}_{\mathcal{S}} \neq \vec{0}$ .
- $\Theta_0 \cup \Theta_1$  indica-se qualquer vector  $\vec{\beta}_{\mathcal{S}}$ , sem restrições.

# Teorema de Wilks

Designa-se **razão de verosimilhanças** (likelihood ratio) a:

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{\max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}{\max_{\boldsymbol{\theta} \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})}$$

O **Teorema de Wilks** garante que, sob  $H_0$  (e com certas condições de regularidade da função de verosimilhança)  $\Lambda = -2\ln(R_n)$  tem distribuição **assintótica**  $\chi_q^2$ , onde  $q$  indica o número de restrições impostas aos parâmetros em  $H_0$ :

$$\Lambda = -2 \left( \max_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_0} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) - \max_{\boldsymbol{\theta} \in (\Theta_0 \cup \Theta_1)} \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{x}) \right) \sim \chi_q^2.$$

Assim,  $\Lambda$  pode ser utilizada como **estatística do teste** às hipóteses:

$$H_0 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \boldsymbol{\theta} \in \Theta_1.$$

com **região crítica unilateral direita**.

# Teste de Wilks a Submodelos

No contexto de comparação de modelos e submodelos num MLG,

- $q$  é a diferença entre o número de parâmetros do modelo completo ( $\Theta_0 \cup \Theta_1$ ) e do submodelo ( $\Theta_0$ ):  $q = p - k$ ;
- o Desvio do modelo completo,  $D_M^* = -2(\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T))$  é calculado com base na log-verosimilhança  $\mathcal{L}(\hat{\theta}^M)$  correspondente às estimativas MV do Modelo Completo;
- o Desvio do submodelo,  $D_S^* = -2(\mathcal{L}(\hat{\theta}^S) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T))$  é calculado com base na log-verosimilhança  $\mathcal{L}(\hat{\theta}^S)$  correspondente às estimativas MV do Submodelo;
- A log-verosimilhança  $\mathcal{L}(\hat{\theta}^T)$  do modelo saturado é igual nos dois casos (os valores esperados de  $Y$  são sempre estimados pelos valores observados);
- a estatística do teste é apenas a diferença dos desvios:

$$\Lambda = D_S^* - D_M^*$$

# Teste de Wilks a Submodelos

A estatística do Teste de Wilks a modelos encaixados é a diferença dos Desvios de Modelo e Submodelo.

## Teste de Wilk a Submodelos Encaixados

Hipóteses:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j \notin S & \quad \text{vs.} \quad H_1 : \exists j \notin S, \text{ t.q. } \beta_j \neq 0 \\ \Leftrightarrow H_0 : \vec{\beta}_{\bar{S}} = \vec{0} & \quad \text{vs.} \quad H_1 : \vec{\beta}_{\bar{S}} \neq \vec{0} \\ \text{[ Submodelo OK]} & \quad \text{vs.} \quad \text{[ Modelo melhor]} \end{aligned}$$

Estatística do Teste:  $\Lambda = D_S^* - D_M^* \sim \chi_{p-k}^2$ ,

Região Crítica: Unilateral direita **Rejeitar  $H_0$  se  $\Lambda_{calc} > \chi_{\alpha; (p-k)}^2$ .**

Nota: No caso do parâmetro de dispersão  $\phi$  não ser conhecido, o cálculo de  $D^*$  (que envolve  $\phi$ ) fica condicionado. São necessários testes alternativos, ou trabalhar apenas com resultados aproximados, usando uma estimativa de  $\phi$ . O problema não existe para respostas Binomiais ou Poisson.

# Teste de Wilks ao Ajustamento Global

Para MLGs cuja componente sistemática inclui uma parcela aditiva constante, o conceito de ajustamento global do Modelo pode ser semelhante ao usado no estudo do Modelo Linear: compare-se o ajustamento do Modelo e do **Submodelo Nulo**, que se obtém sem qualquer variável preditora (apenas com a constante).

No **Submodelo Nulo** tem-se:

$$g(E[Y_i]) = \beta_0 \quad \iff \quad E[Y_i] = g^{-1}(\beta_0), \quad \forall i = 1 : n.$$

Ou seja,  $E[Y]$  é constante.

Se o Modelo sob estudo não se ajustar de forma significativamente melhor que esse Submodelo Nulo, conclui-se pela inutilidade do Modelo.

## Teste de Wilks ao Ajustamento Global (cont.)

Para modelos em que não seja necessário estimar o parâmetro de dispersão  $\phi$ , tem-se:

### Teste de Wilk ao Ajustamento de um MLG

Hipóteses:

$$\begin{array}{ll} H_0 : \beta_j = 0, \quad \forall j = 1 : p & \text{vs.} \quad H_1 : \exists j = 1 : p, \text{ t.q. } \beta_j \neq 0 \\ \text{[Modelo inútil]} & \text{vs.} \quad \text{[Melhor que Modelo Nulo]} \end{array}$$

Estatística do Teste:  $\Lambda = D_N^* - D_M^* \sim \chi_p^2$ ,

Região Crítica: Unilateral direito. Rejeitar  $H_0$  se  $\Lambda_{calc} > \chi_{\alpha;p}^2$ .

$D_N^*$  indica o Desvio do Modelo Nulo.



## Exemplo: Exercício 3

### Dados Elisa1 (emergencias)

Para testar a significância do ganho no desvio (face ao Modelo Nulo),  
recorre-se ao teste de Wilks:

```
> anova(Elisa1.glm, test="Chisq")
```

```
Analysis of Deviance Table
```

```
Model: poisson, link: log
```

```
Response: emergencias
```

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	Pr(>Chi)
NULL			56	513.00	
esciarideos	1	268.78	55	244.22	< 2.2e-16 ***

O modelo ajusta-se significativamente melhor do que o Modelo Nulo.

# Desvio na Bernoulli

Vimos (slide 16) que se  $Y$  tem **distribuição Bernoulli**:

$$\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad ; \quad b(\theta) = \ln(1 + e^\theta) = -\ln(1-p) \quad ; \quad \phi = a(\theta) = 1 .$$

No modelo saturado tem-se:  $\hat{\rho}_i^T = y_i$ . No modelo ajustado, fica  $\hat{\rho}_i^M = \hat{\rho}_i$ .

Substituindo a expressão geral do Desvio (acetato 103), fica:

$$\begin{aligned} D^* &= -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \left[ \ln\left(\frac{y_i}{1-y_i}\right) - \ln\left(\frac{\hat{\rho}_i}{1-\hat{\rho}_i}\right) \right] + \left[ \ln(1-y_i) - \ln(1-\hat{\rho}_i) \right] \right\} \\ \Leftrightarrow D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \left\{ y_i \ln\left(\frac{y_i}{\hat{\rho}_i}\right) + (1-y_i) \ln\left(\frac{1-y_i}{1-\hat{\rho}_i}\right) \right\} \end{aligned}$$

## Desvio na Binomial/n

Vimos (slide 30) que se  $Y$  tem **distribuição 'Binomial/n'**:

$$\theta = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) \quad ; \quad b(\theta) = -\ln(1-p) \quad ; \quad \phi = 1 \quad ; \quad a(\phi) = \frac{1}{n} .$$

No modelo saturado tem-se:  $\hat{p}_i^T = y_i$ . No modelo ajustado, fica  $\hat{p}_i^M = \hat{p}_i$ .

Substituindo a expressão geral do Desvio (acetato 103), fica:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]]}{a(\phi_i)}$$
$$\Leftrightarrow D^* = 2 \sum_{i=1}^n n_i \left\{ y_i \ln\left(\frac{y_i}{\hat{p}_i}\right) + (1-y_i) \ln\left(\frac{1-y_i}{1-\hat{p}_i}\right) \right\}$$

A expressão de  $\hat{p}$  (logo, do Desvio) depende **também** da função de ligação usada.

A expressão do Desvio difere na Bernoulli e Binomial/n.

# Exercício 1: teste de ajustamento global no

No R, um teste de Wilks comparando um modelo GLM com o modelo nulo correspondente, pode ser feito utilizando o comando `anova`, com o argumento `test="Chisq"`.

## Exemplo: larva do tabaco

```
> tabaco.glm <- glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2),  
+                   family=binomial(link=probit), data=tabaco)  
> anova(tabaco.glm, test="Chisq")
```

```
Analysis of Deviance Table  
Model: binomial, link: probit  
Response: cbind(morte, 20 - morte)  
Terms added sequentially (first to last)
```

	Df	Deviance	Resid. Df	Resid. Dev	Pr(>Chi)
NULL			11	124.876	
log(dose, 2)	1	108.46	10	16.414	< 2.2e-16 ***

Como previsível, o modelo ajusta-se significativamente melhor do que um modelo nulo, que estima uma probabilidade constante  $p$ , para qualquer dose.

# Seleção de Submodelos

Tal como no Modelo Linear, a escolha dum submodelo adequado pode ser determinado por considerações de diversa ordem.

Caso não haja um submodelo proposto, a pesquisa completa dos  $2^p - 2$  possíveis submodelos coloca as mesmas dificuldades computacionais já consideradas no estudo do Modelo Linear.

A função `leaps` do módulo `R subselect` permite efectuar **pesquisas completas** para submodelos MLG óptimos duma dada cardinalidade (desde que o número de preditores não seja muito grande).

Alternativamente, **é possível usar algoritmos de exclusão ou inclusão sequenciais**, semelhantes aos usados no Modelo Linear, mas **adoptando como critério para a inclusão/exclusão de variáveis a maior/menor redução (significativa) que geram no Desvio ou AIC.**

# O AIC em GLMs

## Cr terio de Informa o de Akaike (AIC)

Define-se, num MLG com  $m$  parâmetros, estimados por  $\vec{\hat{\beta}}$ , como:

$$AIC = -2 \cdot \mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}}; \vec{Y}) + 2m.$$

sendo  $\mathcal{L}(\vec{\hat{\beta}}; \vec{Y})$  a log-verosimilhança da amostra.

- Quanto menor o valor do AIC (para igual variável resposta  $\vec{Y}$ ), melhor o ajustamento do modelo.
- O AIC pode ser usado como critério de compara o de modelos com a mesma amostra e componente aleatória.
- Note-se que num GLM, quer o desvio  $D^* = -2(\mathcal{L}_M - \mathcal{L}_T)$ , quer o AIC, são definidos   custa da log-verosimilhança.

# Modelos com variável resposta Gama

## A distribuição Gama

A Gama é uma distribuição de variáveis aleatórias **contínuas** tomando valores em  $\mathbb{R}^+$ . Uma **parametrização usual em MLGs** (ver Exercício 6) é:

$$f(y \mid \mu, \nu) = \frac{\nu^\nu}{\mu^\nu \Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-\frac{\nu y}{\mu}}$$

**Casos particulares:** a distribuição **Qui-quadrado** ( $\chi_n^2$  se  $\nu = \frac{n}{2}$  e  $\mu = n$ ) e a distribuição **Exponencial** ( $\nu = 1$ ).

Se  $Y \sim G(\mu, \nu)$ , a variância é proporcional ao quadrado da média:

$$E[Y] = \mu \quad \text{e} \quad V[Y] = \frac{\mu^2}{\nu}$$

MLGs com componente aleatória Gama podem ser úteis em situações onde a variância dos dados não seja constante, mas proporcional ao quadrado da média.

# A distribuição Gama na família exponencial

Uma variável aleatória  $Y$  tem distribuição **Gama** com parâmetros  $\mu$  e  $\nu$  se toma valores em  $\mathbb{R}^+$ , com função densidade da forma:

$$f(y | \mu, \nu) = \frac{\nu^\nu}{\mu^\nu \Gamma(\nu)} y^{\nu-1} e^{-\frac{\nu y}{\mu}} = e^{\frac{(-\frac{1}{\mu})y + \ln(\frac{1}{\mu})}{\frac{1}{\nu}} + \nu \ln \nu - \ln \Gamma(\nu) + (\nu-1) \ln y}$$

A Gama é da família exponencial,  $f(y|\theta, \phi) = e^{\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\phi)} + c(y, \phi)}$ , com:

- $\theta = -\frac{1}{\mu}$
- $\phi = \frac{1}{\nu}$
- $b(\theta) = -\ln\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\ln(-\theta)$
- $a(\phi) = \phi = \frac{1}{\nu}$
- $c(y, \phi) = \nu \ln \nu - \ln \Gamma(\nu) + (\nu - 1) \ln y$



# Funções de ligação e ligação canónica na Gama

Uma vez que para  $Y \sim G(\mu, \nu)$  se verifica  $E[Y] = \mu$ , as funções de ligação  $g$  num MLG com variável resposta Gama relacionam a média  $\mu$  com as combinações lineares das variáveis preditoras:

$$g(\mu) = \vec{x}^t \vec{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_p x_p$$

A **função de ligação canónica** para modelos com distribuição Gama transforma o valor esperado de  $Y$  no parâmetro natural  $\theta = -\frac{1}{\mu}$ .

Como o sinal negativo apenas afecta o sinal dos  $\beta_j$ s, é hábito definir a função de ligação canónica para modelos com variável resposta Gama apenas como a **função recíproco**:

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu}$$

## Modelo Gama com ligação canónica

O modelo fica completo equacionando a parte sistemática a esta transformação canónica do valor esperado de  $Y$ :

$$g(\mu) = \frac{1}{\mu} = \vec{x}^t \vec{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\vec{x}} = g^{-1}(\vec{x}^t \vec{\beta}) = \frac{1}{\vec{x}^t \vec{\beta}}$$

**Nota:** embora o valor esperado da variável resposta  $Y$  tenha de ser positivo (uma variável  $Y$  com distribuição Gama só toma valores positivos), na relação acima o valor esperado  $\mu$  pode ser negativo.

Assim, e ao contrário de modelos anteriores, **não existe uma “garantia estrutural”** de que os valores de  $\mu$  estimados façam sentido.

# Curvas conhecidas em contexto MLG

No caso particular de haver uma única variável preditora numérica, a relação obtida diz que o valor médio de  $Y$  é dado por uma curva de tipo hiperbólico,

$$E[Y] = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x}.$$

Esta função tem sido usada em Agronomia para modelar curvas de rendimento por planta ( $Y$ ), em função da densidade da cultura ( $X$ ).

Caso se opte por trabalhar com os recíprocos dum único preditor, ou seja com a transformação  $X^* = \frac{1}{X}$ , o valor esperado fica

$$E[Y] = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1/x} = \frac{x}{x\beta_0 + \beta_1},$$

pelo que o valor esperado de  $Y$  será dado pela curva de Michaelis-Menten (com a parametrização de Shinozaki-Kira).

# Quadro-resumo da família exponencial

Distribuição	$E[Y]$	$V[Y]$	$\theta$	$b(\theta)$	$\phi$	$a(\phi)$
Normal	$\mu$	$\sigma^2$	$\mu$	$\frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2}$	$\sigma^2$	$\sigma^2$
Poisson	$\lambda$	$\lambda$	$\ln(\lambda)$	$e^\theta = \lambda$	1	1
Bernoulli	$p$	$p(1-p)$	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$\ln(1+e^\theta) = -\ln(1-p)$	1	1
Binomial/n	$p$	$\frac{p(1-p)}{n}$	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$	$e^\theta = \lambda$	1	$\frac{1}{n}(\ast)$
Gama	$\mu$	$\frac{\mu^2}{v}$	$-\frac{1}{\mu}$	$-\ln(-\theta) = -\ln\left(\frac{1}{\mu}\right)$	$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{v}$

(\*) Tirando este caso, tem-se sempre  $a(\phi) = \phi$ .

# O parâmetro de dispersão $\phi$ desconhecido

Em GLMs com variável resposta Poisson ou Bernoulli/Binomial, o parâmetro de dispersão é conhecido:  $\phi = 1$ .

Mas em GLMs com componente aleatória de distribuição Gama, ou Normal, o parâmetro de dispersão é, em geral, desconhecido:

- Numa Normal,  $\phi = \sigma^2$  (a variância);
- Numa Gama com a parametrização  $Y \sim G(\mu, \nu)$ ,  $\phi = \frac{1}{\nu}$  (com variância  $V[Y] = \mu^2 \phi$ ).

O desconhecimento de  $\phi$  exige estimação e cria problemas.

É frequente admitir que  $\phi$  é comum a todas as observações, ou que varia entre observações apenas devido a constantes conhecidas. Admitir  $\phi_i$ 's arbitrariamente diferentes impede a sua estimação.

# Desvio e desvio reduzido

Sendo necessário estimar  $\phi$ , define-se o **desvio reduzido** (scaled deviance).

## Desvio e desvio reduzido

Admitindo que  $a(\phi_i) = \frac{\phi}{w_i}$ , para  $\phi$  comum a todas as observações e pesos  $w_i$  conhecidos, o desvio fica:

$$D^* = -2[\mathcal{L}(\hat{\theta}^M) - \mathcal{L}(\hat{\theta}^T)] = 2 \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\phi} \left\{ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right\}$$

É usual chamar a  $D^*$  o **desvio reduzido** (scaled deviance) e reservar a expressão **desvio** (deviance) para  $D$ , definido tal que:

$$D^* = \frac{D}{\phi}, \quad \Leftrightarrow \quad D = 2 \sum_{i=1}^n w_i \left\{ y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)] \right\}$$

NOTA: Na Poisson e Bernoulli-Binomial/ $n$ , desvio e desvio reduzido coincidem, pois  $\phi = 1$ .

## Desvio e desvio reduzido na Normal

Vimos (slide 15) que se  $Y$  tem **distribuição Normal**:

$$\theta = \mu \quad ; \quad b(\theta) = \frac{\theta^2}{2} = \frac{\mu^2}{2} \quad ; \quad \phi = \sigma^2 \quad ; \quad a(\phi) = \phi = \sigma^2 .$$

No modelo saturado tem-se:  $\hat{\mu}_i^T = y_i$ . No modelo ajustado, fica  $\hat{\mu}_i^M = \hat{\mu}_i$ .

Substituindo na expressão geral do Desvio (slide 103):

$$\begin{aligned} D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]]}{a(\phi_i)} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(y_i - \hat{\mu}_i) - \frac{y_i^2}{2} + \frac{\hat{\mu}_i^2}{2}]}{\sigma_i^2} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[\frac{y_i^2}{2} - y_i \hat{\mu}_i + \frac{\hat{\mu}_i^2}{2}]}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{\sigma_i^2} . \end{aligned}$$

Com a hipótese de variâncias homogêneas do Modelo Linear,  $\sigma_i^2 = \sigma^2 = \phi$  para todo o  $i$ , o **desvio** da Normal é a Soma de Quadrados Residual:

$$D = \phi \cdot D^* = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2 = \text{SQRE} ,$$

# Desvio e desvio reduzido na Gama

Tem-se, a partir do slide 120:

$$\theta = -\frac{1}{\mu} \quad ; \quad b(\theta) = -\ln(-\theta) = \ln(\mu) \quad ; \quad \phi = \frac{1}{v} \quad ; \quad a(\phi) = \phi = \frac{1}{v} .$$

Logo, (slide 103) o desvio reduzido  $D^*$  vem:

$$\begin{aligned} D^* &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(\hat{\theta}_i^T - \hat{\theta}_i^M) - [b(\hat{\theta}_i^T) - b(\hat{\theta}_i^M)]]}{a(\phi_i)} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{[y_i(-\frac{1}{y_i} + \frac{1}{\hat{\mu}_i}) - [\ln(y_i) - \ln(\hat{\mu}_i)]]}{\frac{1}{v_i}} = 2 \sum_{i=1}^n v_i \left[ \left( \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} \right) - \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right] \end{aligned}$$

Admitindo que  $a(\phi_i) = \phi = \frac{1}{v}$  (constante para todas as observações), o desvio  $D$  (slide 126) vem:

$$D = \phi \cdot D^* = 2 \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]$$



# Estimação do parâmetro de dispersão $\phi$

A estimação do parâmetro de dispersão  $\phi$  exige que se admita que é comum a todas as observações ou, quanto muito, que varia apenas devido a constantes conhecidas.

Uma forma de estimar  $\phi$  envolve o seu estimador de máxima verosimilhança. Mas a forma mais usual de estimar  $\phi$  envolve um tipo de resíduos, chamados resíduos de Pearson, que veremos adiante.

Mesmo em modelos de resposta Binomial ou Poisson, onde  $\phi = 1$ , esta estimativa da dispersão pode ser útil: um valor de  $\hat{\phi}$  muito superior a 1 sugere a existência de **sobredispersão**, aconselhando modificações ao modelo. No R, essa estimativa pode ser obtida usando a opção **quasi** na definição da `family` associada ao MLG.

# Resíduos e Validação do Modelo

O conceito usual de resíduos no Modelo Linear,  $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{\mu}_i$ , tem diferentes **adaptações nos MLGs**, onde, diversamente do que acontecia nos Modelos Lineares, **não se contempla a existência de erros aleatórios aditivos**.

Em Modelos Lineares Generalizados utilizam-se diversos conceitos de resíduos, sendo os principais os

- resíduos do desvio; e os
- resíduos de Pearson.

# Resíduos do Desvio

Os **resíduos do Desvio** baseiam-se nas parcelas da definição do Desvio dum MLG (ou seja, na contribuição para o Desvio de cada observação).

## Resíduos do Desvio

Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  uma amostra aleatória da Componente Aleatória dum Modelo Linear Generalizado. Seja

$$D = \sum_{i=1}^n d_i$$

o seu Desvio. Designa-se **resíduo do Desvio** da observação  $i$  a:

$$r_i^D = \text{sinal}(y_i - \hat{\mu}_i) \cdot \sqrt{d_i}$$

# Resíduos do desvio (cont.)

Concretizando:

- **Normal:** Tem-se  $d_i = (y_i - \hat{\mu}_i)^2$ . O resíduo do Desvio vem:

$$r_i^D = y_i - \hat{\mu}_i$$

Os resíduos do Desvio são os resíduos usuais do Modelo Linear.

- **Bernoulli:** tem-se

$$d_i = -2 \cdot [y_i \ln(\hat{p}_i) + (1 - y_i) \ln(1 - \hat{p}_i)] = \begin{cases} -2 \ln(1 - \hat{p}_i) & \text{se } y_i = 0 \\ -2 \ln(\hat{p}_i) & \text{se } y_i = 1 \end{cases}$$

Os resíduos do Desvio para  $Y$  Bernoulli são:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{p}_i) \cdot \sqrt{d_i} = \begin{cases} -\sqrt{-2 \ln(1 - \hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 0 \\ \sqrt{-2 \ln(\hat{p}_i)} & \text{se } y_i = 1 \end{cases}$$

## Resíduos do Desvio (cont.)

- **Binomial/n:** tem-se

$$d_i = \begin{cases} -2n_i \left[ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\hat{p}_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left( \frac{1 - y_i}{1 - \hat{p}_i} \right) \right] & \text{se } y_i \neq 0, 1 \\ -2n_i \left[ -y_i \ln(\hat{p}_i) - (1 - y_i) \ln(1 - \hat{p}_i) \right] & \text{se } y_i \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

Os resíduos do Desvio para  $Y$  Binomial/n são:

$$r_i^D = \begin{cases} \sqrt{-2n_i \left[ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\hat{p}_i} \right) + (1 - y_i) \ln \left( \frac{1 - y_i}{1 - \hat{p}_i} \right) \right]} & \text{se } y_i \neq 0, 1 \\ \sqrt{2n_i \left[ -y_i \ln(\hat{p}_i) - (1 - y_i) \ln(1 - \hat{p}_i) \right]} & \text{se } y_i \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

- **Poisson:** Neste caso  $d_i = 2 \cdot \left[ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right]$ . Os resíduos do Desvio para  $Y$  Poisson são:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{\lambda}_i) \cdot \sqrt{2 \left[ y_i \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\lambda}_i} \right) - (y_i - \hat{\lambda}_i) \right]}$$

## Resíduos do Desvio (cont.)

- **Gama:** neste caso

$$d_i = 2 \cdot \left[ \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]$$

Os resíduos do Desvio para  $Y$  Gama são:

$$r_i^D = \text{sign}(y_i - \hat{\mu}_i) \cdot \sqrt{2 \cdot \left[ \frac{y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i} - \ln \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) \right]}$$

A cada diferente função de ligação  $g$  corresponde uma diferente forma de obter as médias ajustadas  $\hat{\mu}$ , logo uma diferente expressão concreta para os resíduos do Desvio.

# Resíduos de Pearson e Função de Variância

Nos **resíduos de Pearson**, a diferença entre valores observados de  $Y_i$  e correspondentes estimativas dos seus valores esperados,  $\widehat{E}[Y_i] = \hat{\mu}_i$ , é dividida pela raiz quadrada da chamada **função de variância** do modelo.

## Função de Variância

Dado um MLG com componente aleatória  $Y$  de média  $E[Y]$ , variância  $V[Y]$  e parâmetro de dispersão  $\phi$ . A função  $f_v(E[Y]) = \frac{V[Y]}{\phi}$  designa-se a **função de variância** do modelo. Tem-se:  
 $V[Y] = \phi \cdot f_v(E[Y])$ .

## Função de Variância (cont.)

A função de variância é diferente para cada distribuição de  $Y$ :

- **Normal:** Tem-se  $f_v(\mu) = \frac{V[Y]}{\phi} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$ .
- **Bernoulli:**  $f_v(p) = \frac{V[Y]}{1} = V[Y] = p(1-p)$ .
- **Binomial/n:**  $f_v(p) = \frac{V[Y]}{1} = V[Y] = \frac{p(1-p)}{n}$ .
- **Poisson:** Tem-se  $f_v(\lambda) = \frac{V[Y]}{1} = V[Y] = \lambda$ .
- **Gama:** Tem-se  $f_v(\mu) = \frac{V[Y]}{\phi} = \frac{\frac{\mu^2}{v}}{\frac{1}{v}} = \mu^2$ .



# Resíduos de Pearson

## Resíduos de Pearson

Seja  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  uma amostra aleatória da componente aleatória dum Modelo Linear Generalizado. Designa-se **resíduo de Pearson** de cada observação a:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{f_v(\hat{\mu}_i)}} .$$

- **Normal:** Tem-se  $f_v(\mu_i) = \frac{V[Y_i]}{\sigma_i^2} = 1$ . O resíduo de Pearson é o **habitual resíduo do Modelo Linear**:

$$r_i^P = Y_i - \hat{\mu}_i$$

- **Poisson:** Tem-se  $f_v(\lambda_i) = \frac{V[Y_i]}{1} = \lambda_i$ . O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\lambda}_i}{\sqrt{\hat{\lambda}_i}}$$

## Resíduos de Pearson (cont.)

- **Bernoulli:**  $f_v(p_i) = \frac{V[Y_i]}{1} = p_i(1 - p_i)$ . O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{p}_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1 - \hat{p}_i)}} \quad (1)$$

- **Binomial/n:**  $f_v(p_i) = \frac{V[Y_i]}{1} = \frac{p_i(1-p_i)}{n_i}$ . O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{p}_i}{\sqrt{\frac{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}{n_i}}} \quad (2)$$

- **Gama:** Tem-se  $f_v(\mu_i) = \frac{V[Y_i]}{\phi_i} = \frac{\frac{\mu_i^2}{v_i}}{\frac{1}{v_i}} = \mu_i^2$ . O resíduo de Pearson é:

$$r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\mu}_i}{\hat{\mu}_i}$$

## Resíduos de Pearson (cont.)

As expressões dos resíduos de Pearson **dependem também das funções de ligação**. Por exemplo, em modelos de resposta dicotómica, nas fórmulas (1) e (2) do acetato 138 tem-se,

- numa **Regressão Logística**:

$$\hat{p}_i = \frac{1}{1 + e^{-(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})}}$$

- Numa **Regressão Probit**:

$$\hat{p}_i = \Phi(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)})$$

- Num **modelo Log-log do complementar**:

$$\hat{p}_i = 1 - e^{-e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1(i)} + \dots + \hat{\beta}_p x_{p(i)}}}$$

## Estatística de Pearson generalizada

No slide 137 viu-se que, para MLGs com componente aleatória Poisson, o resíduo de Pearson é dado por  $r_i^P = \frac{Y_i - \hat{\lambda}_i}{\sqrt{\hat{\lambda}_i}}$ . Como nesses modelos  $\hat{\lambda}_i = E[Y_i]$ , a soma de quadrados desses resíduos é a habitual estatística de Pearson dos testes Qui-quadrado,  $\sum_{i=1}^n \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$ . Essa relação dá origem ao seguinte conceito.

### Estatística de Pearson generalizada, $\chi^2$

Dado um MLG com resíduos de Pearson  $r_i^P$  chama-se **Estatística de Pearson generalizada** à soma de quadrados desses resíduos:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n (r_i^P)^2 .$$

Por vezes, este valor é usado em alternativa ao desvio, como indicação da qualidade de ajustamento do modelo.

# Estimação do parâmetro de dispersão $\phi$

Em MLGs com parâmetro de dispersão  $\phi$  desconhecido, uma das formas usada para estimar  $\phi$  baseia-se nos resíduos de Pearson.

## Estimador de $\phi$

Num MLG com  $m$  parâmetros na componente sistemática e admitindo parâmetro de dispersão  $\phi$  comum a todas as observações  $Y_i$ , um estimador de  $\phi$  é dado por:

$$\hat{\phi} = \frac{\chi^2}{n-m} = \frac{\sum_{i=1}^n (r_i^P)^2}{n-m}.$$

**Nota:** No caso particular do Modelo Linear este estimador é o *QMRE*.

# Os Resíduos no

Tal como no modelo linear, o R disponibiliza funções para o cálculo dos resíduos e dos resíduos normalizados.

- `residuals` calcula os resíduos (não estandardizados). Por omissão, trata-se dos resíduos do desvio.

```
> residuals(tabaco.glm)
      1          2          3          4          5          6
-0.003720807  0.631866326  1.149311810  0.834445925  1.498556259  1.944020824
      7          8          9         10         11         12
-1.435052677 -0.632286846 -0.253437946 -0.523178851 -1.708321246 -1.502372783
```

- Podem obter-se os resíduos de Pearson explicitando a opção `type="pearson"`.

```
> residuals(tabaco.glm, type="pearson")
      1          2          3          4          5          6
-0.00371868  0.65977673  1.17907319  0.82587899  1.37017323  1.40774747
      7          8          9         10         11         12
-1.02793742 -0.60081763 -0.25159052 -0.52497400 -1.82437610 -1.71522073
```

# Os Resíduos na Validação de um MLG

Os resíduos podem ser utilizados para:

- estudar a validade da hipótese distribucional associada à sua componente aleatória;
- estudar a adequabilidade da componente sistemática como preditor linear;
- estudar a adequabilidade da função de ligação escolhida;
- como diagnósticos na procura de observações com particularidades especiais.

A utilização dos resíduos tem muitas especificidades para cada MLG concreto, sendo difícil uma discussão conjunta.

Para uma discussão mais aprofundada, sugere-se a consulta de McCullagh & Nelder (1989) ou outra bibliografia.

# MLGs no estudo de tabelas de contingência

MLGs admitem variáveis preditoras quantitativas, qualitativas, ou de ambos os tipos.

Modelos Log-lineares são particularmente importantes no estudo de tabelas de contingência.

Trata-se de um contexto onde a componente aleatória corresponde a contagens (variável discreta), que se pretendem relacionar com os níveis de um ou mais factores.

São frequentes os casos onde a variável resposta se pode considerar como tendo uma distribuição de Poisson (ou ainda binomial ou a sua generalização multinomial).



# Modelos tipo ANCOVA em MLGs

Modelos de tipo ANCOVA misturam preditores quantitativos e factores.

Vamos ilustrar com um contexto específico:

- modelos tipo ANCOVA que correspondem a modificar os parâmetros  $\beta_j$  dum MLG para cada nível de um factor (ver exemplo no Exercício 9);
- diferentes submodelos correspondem a admitir que alguns parâmetros são iguais em diferentes níveis do factor.

Exemplifica-se admitindo um MLG com um só preditor numérico e  $k = 3$  níveis dum factor. Mas a abordagem é extensível a qualquer número de preditores numéricos e qualquer número  $k \in \mathbb{N}$  de níveis.

## A formulação do modelo

Admita-se um MLG entre uma componente aleatória  $Y$  e um preditor numérico  $x$ , com parâmetros  $\beta_j$  que **podem ser diferentes em cada um de 3 níveis dum factor**. Assim, a componente sistemática seria da forma:

- Contexto 1:  $\beta_0 + \beta_1 x$
- Contexto 2:  $\beta_0^* + \beta_1^* x$
- Contexto 3:  $\beta_0^{**} + \beta_1^{**} x$

Considere-se o primeiro contexto como **nível de referência** e **escrevam-se os parâmetros dos contextos restantes à custa dos primeiros**:

$$\begin{aligned} \beta_0^* &= \beta_0 + \alpha_{0:2} & ; & & \beta_1^* &= \beta_1 + \alpha_{1:2} \\ \beta_0^{**} &= \beta_0 + \alpha_{0:3} & ; & & \beta_1^{**} &= \beta_1 + \alpha_{1:3} \end{aligned}$$

Com os parâmetros escritos desta forma, **a hipótese de que há um mesmo modelo MLG nos três níveis do factor é a hipótese**

$$\alpha_{0:2} = \alpha_{0:3} = \alpha_{1:2} = \alpha_{1:3} = 0 .$$

## A formulação do modelo (cont.)

Fazem-se  $n$  observações para ajustar o modelo, sendo  $n_i$  em cada nível ( $i = 1, 2, 3$ ). Como na ANOVA a um factor, use-se a **dupla indexação** para identificar os níveis de origem:  $Y_{ij}$  e  $x_{ij}$ .

Tomem-se as **variáveis indicatrizes**  $\vec{\mathcal{J}}_i$  de pertença aos níveis.

Definam-se ainda **vectores com os valores do preditor  $x$  num dado nível  $i$  ( $i > 1$ ) e zero noutras posições**, representados por  $\vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_i$ .

Num exemplo com  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 4$  e  $n_3 = 2$  observações, tem-se:

$$\vec{\mathcal{J}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{23} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\mathcal{J}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} \circ \vec{\mathcal{J}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_{31} \\ x_{32} \end{bmatrix}$$

# A equação do modelo ANCOVA

Podemos agora escrever a equação do modelo MLG da seguinte forma:

$$g(E[\vec{Y}]) = \beta_0 \mathbf{1}_n + \beta_1 \vec{\mathbf{x}} + \alpha_{0:2} \vec{\mathcal{J}}_2 + \alpha_{0:3} \vec{\mathcal{J}}_3 + \alpha_{1:2} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2) + \alpha_{1:3} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3)$$

O modelo ajusta, às observações de cada um dos três contextos, as seguintes relações:

$$g(E[Y_{ij}]) = \begin{cases} \beta_0 + \beta_1 x_{1j}, & \text{se } i = 1 \\ (\beta_0 + \alpha_{0:2}) + (\beta_1 + \alpha_{1:2}) x_{2j}, & \text{se } i = 2 \\ (\beta_0 + \alpha_{0:3}) + (\beta_1 + \alpha_{1:3}) x_{3j}, & \text{se } i = 3. \end{cases} \quad (3)$$

Caso os parâmetros de acréscimo  $\alpha_{i:j}$  sejam *todos* iguais a zero, tem-se um único modelo MLG para os três contextos.

Este modelo tem  $3 \times 2 = 6$  parâmetros (e variáveis preditoras  $\vec{\mathbf{x}}$ ,  $\vec{\mathcal{J}}_2$ ,  $\vec{\mathcal{J}}_3$ ,  $\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2$ ,  $\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3$ ). Em geral, para  $k$  níveis do factor haverá  $2k$  parâmetros.

# Alguns submodelos interessantes

$$\beta_0 \mathbf{1}_n + \beta_1 \vec{\mathbf{x}} + \alpha_{0:2} \vec{\mathcal{J}}_2 + \alpha_{0:3} \vec{\mathcal{J}}_3 + \alpha_{1:2} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_2) + \alpha_{1:3} (\vec{\mathbf{x}} \circ \vec{\mathcal{J}}_3)$$

- A hipótese **dum único MLG nos 3 contextos** é a hipótese  $\alpha_{0:2} = \alpha_{0:3} = \alpha_{1:2} = \alpha_{1:3} = 0$ .
- A hipótese de **os dois primeiros contextos terem o mesmo MLG** é a hipótese  $\alpha_{0:2} = \alpha_{1:2} = 0$ .
- A hipótese de **o segunda e terceiro contextos terem o mesmo MLG**, é a hipótese  $\alpha_{0:2} = \alpha_{0:3}$  e  $\alpha_{1:2} = \alpha_{1:3}$ .

Estas hipóteses (ou outras análogas) podem ser testadas através de testes do Lambda de Wilks já vistos no estudo geral de MLGs.

# Exercício 9

## Exemplo: larva do tabaco - modelo tipo ANCOVA

No R, modelos de tipo ANCOVA ajustam-se com fórmulas cruzando factor e preditores:

```
> tabaco.glmSx <- glm(cbind(morte,20-morte) ~ log(dose,2) * sexo ,  
+ family=binomial(link=probit), data=tabaco)  
> summary(tabaco.glmSx)
```

```
(...)  
Coefficients:  
                Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)  
(Intercept)    -1.80072    0.29832  -6.036 1.58e-09 ***  
log(dose, 2)     0.54523    0.09138   5.966 2.43e-09 ***  
sexomacho        0.15479    0.41635   0.372  0.710  
log(dose, 2):sexomacho 0.19165    0.14259   1.344  0.179  
(...)  
Null deviance: 124.876  on 11  degrees of freedom  
Residual deviance:  3.768  on 8  degrees of freedom <-- o desvio baixou de 16.41 para 3.768  
AIC: 41.878
```

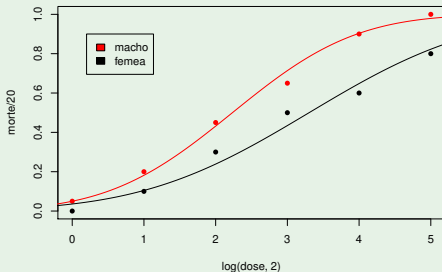
O nível de referência é fêmeas (ordem alfabética). As relações estimadas são:

- $p(x) = \Phi(-1.80072 + 0.54532 \log_2(x))$  nas fêmeas; e
- $p(x) = \Phi((-1.80072 + 0.15479) + (0.54532 + 0.19165) \log_2(x))$  nos machos.

## Exercício 9 no (cont.)

### Exemplo: larva do tabaco

```
> plot(morte/20 ~ log(dose,2), col=sexo, data=tabaco, pch=16)
> curve(pnorm(-1.80072+0.54523*x), from=-1, to=6, add=TRUE)
> curve(pnorm((-1.80072+0.15479)+(0.54523+0.19165)*x), from=-1, to=6,
+       col="red", add=TRUE)
> legend(0.2,0.9,legend=c("macho","femea"), fill=c("red","black"))
```

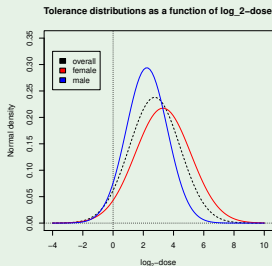


# Interpretação toxicológica

## Larva do tabaco

A distribuição da tolerância face à dosagem (slide 64), em logaritmos de base 2, pode agora ser calculada em separado para fêmeas e machos:

$$T_F \sim \mathcal{N}(3.30268, 3.36388) \quad ; \quad T_M \sim \mathcal{N}(2.233647, 1.84164).$$



A log-dosagem que mata metade das fêmeas mata quase 80% dos machos:

```
> pnorm(3.30268 , m=2.233647 , sd=sqrt(1.84164))  
[1] 0.7845787
```



## Exercício 9: teste de Wilks no

Para saber se há vantagem em considerar modelos diferentes para cada sexo, comparam-se os modelos, como pedido na alínea 9b), usando o teste de Wilks.

### Exemplo: larva do tabaco

```
> anova(tabaco.glm, tabaco.glmSx, test="Chisq")
```

Analysis of Deviance Table

Model 1: cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2)

Model 2: cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) \* sexo

	Resid. Df	Resid. Dev	Df	Deviance	P(> Chi )
1	10	16.414			
2	8	3.768	2	12.646	0.001795 **

O modelo com distinção por sexo é significativamente melhor (previsível pelo ajustamento gráfico).

## Exclusão sequencial no R: Exercício 9

```
> step(tabaco.glmSx)
Start: AIC=41.88
cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) * sexo
      Df Deviance   AIC
- log(dose, 2):sexo  1    5.566 41.676   <- Repare-se na hierarquia de tipos de efeitos. Num
<none>                3.768 41.878   primeiro passo só considera efeitos de interacção.

Step: AIC=41.68
cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) + sexo
      Df Deviance   AIC
<none>                5.566 41.676   <- Tendo excluído a interacção, vai avaliar outros efeitos.
- sexo                1  16.414  50.524
- log(dose, 2)       1 118.799 152.909

Call: glm(formula = cbind(morte, 20 - morte) ~ log(dose, 2) + sexo,
  family = binomial(link = "probit"), data = tabaco)
Coefficients:
 (Intercept)  log(dose, 2)  sexomacho
   -2.0603      0.6324      0.6536

Degrees of Freedom: 11 Total (i.e. Null); 9 Residual
Null Deviance: 124.9
Residual Deviance: 5.566  AIC: 41.68
```

Opção final: modelo com  $\beta_1$  igual nos dois sexos, mas  $\beta_0$  diferente.