INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial Álgebra Linear

18 de julho de 2024 - Duração: 2h30

> Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis e calculadoras, na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
> O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	**1b)i**	**1b)ii**	**1c)i**	**1c)ii**	**1d)i**	**1d)ii**	**1d)iii**	**2a)**	**2b)**	**2c)**	**2d)**	**3a)**	**3b)**	**3c)**	**4**	**5a)**	**5b)**	**5c)**	**6**	**Σ**
1.5	0.5	0.5	0.5	0.75	1.5	1	1.75	0.5	1	1.5	1	1.5	1	0.75	1	0.5	0.5	1.25	1.5	20

[8v] **1.** Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ -1 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix} = [\, u_1\ u_2\ u_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Indique os valores de α para os quais:

i) $\{u_1, u_2, u_3\}$ é linearmente independente.

ii) 0 é valor próprio de A.

c) Indique os valores de α e β para os quais:

i) $b \notin \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$.

ii) $(1, -1, \beta - 1)$ é solução de $Ax = b$.

d) Considere $\alpha = 1$.

i) Descreva $\mathcal{C}(A)$ analítica e geometricamente.

ii) Escreva b como combinação linear de u_1, u_2, u_3 para um valor conveniente de β.

iii) Justifique que $\{(2, 1, -1), (0, 1, 1)\}$ é base ortogonal de $\mathcal{C}(A)$.

[4v] **2.** Considere $U = \langle (1, 0, -1, 0), (0, 1, 2, 1), (-1, 1, 3, 1) \rangle$, $v = (1, -3, 1, 1)$ e $b = (0, 0, 4, 0)$.

a) Justifique que $v \perp U$.

b) Indique uma base e a dimensão de U.

c) Calcule a $\text{proj}_U(b)$ e indique a distância de b a U.

d) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $\text{proj}_U(c) = -\text{proj}_U(b)$ e $d(c, U) = d(b, U)$.

v.s.f.f.

[3.25v] **3.** Considere $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

b) Indique um vetor próprio de A.

c) Averigue se existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por vetores próprios de A.

[1v] **4.** Uma empresa pretende produzir rações para cães ao menor custo misturando para isso dois produtos existentes no mercado, P_1 e P_2, que contêm nutrientes A, B, C e D em certas quantidades. Cada kg de ração deve conter as quantidades mínimas destes nutrientes, expressa em gramas, que consta da tabela seguinte:

Nutriente	A	B	C	D
Quant. mín.	90	50	20	2

As quantidades de nutrientes A, B, C e D presentes nos produtos P_1 e P_2 (em g/kg), bem como o preço destes produtos (em euro/kg) são apresentados na próxima tabela.

Nutriente	A	B	C	D	Custo
P_1	100	80	40	10	40
P_2	200	150	20	-	60

Formule problema em termos de programação linear atribuindo significado a cada variável.

[2.25v] **5.** Considere o seguinte problema de programação linear

$$\begin{array}{lrl} \max & z = & 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{s.a} & & x_1 - x_2 + x_3 \leq 5 \\ & & x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 2 \\ & & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 \end{array}$$

a) Escreva o problema na forma *standard*.

b) Justifique que $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$ define uma solução admissível do problema.

c) Averigue se a solução da alínea anterior corresponde a um vértice da região admissível do problema.

[1.5v] **6.** Defina matriz invertível e prove que a inversa de uma matriz, quando existe, é única.