Redução do sistema do exemplo anterior: fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema do exemplo do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-2L_1]{L_2-3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Matriz dos coeficientes A' em **escada** $\Rightarrow$ podemos classificar o sistema:

- Todas as linhas de $[A'|b']$ correspondem a equações possíveis, isto é, não são do tipo $0\ 0\ 0\,|\,*$ com $* \neq 0$([1]). Logo o sistema é possível.
- Todas as colunas de A' têm *pivot* e portanto não há variáveis livres([2]). Logo o sistema é determinado e o CS é um ponto em $\mathbb{R}^3$.

[1] Que correspondem à equação impossível $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = *$.
[2] Cada variável fica determinada por uma equação.

Conclusão da resolução do exemplo anterior: fase ascendente

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{6}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2+5L_3]{L_1-2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A''|b''].$$

Matriz dos coeficientes A'' está **reduzida** e $[A''|b'']$ corresponde à matriz ampliada do sistema reduzido,

$$\begin{cases} x_1 & & & = & 2 \\ & x_2 & & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Logo, $CS = \{(2, 1, -1)\}$.

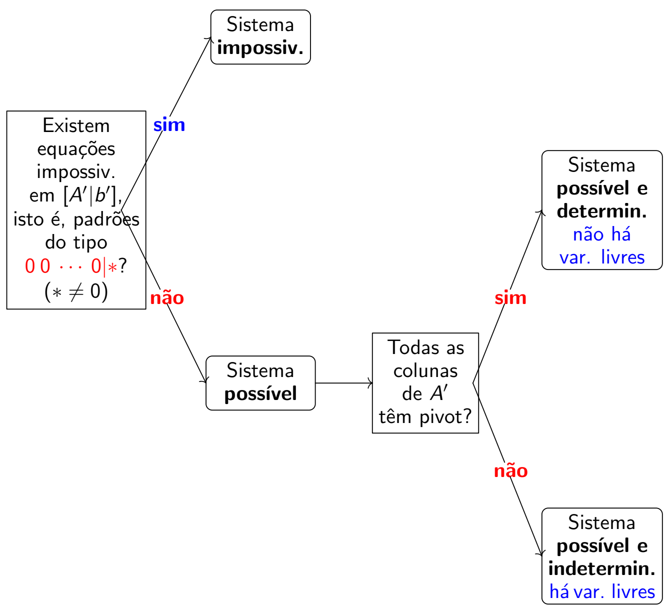
Algoritmo de eliminação de Gauss: fase descendente

- **Input:** Matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear
- **Objectivo:** Redução do sistema linear
- **Fase descendente:**
  - Aplicando operações elementares do tipo III trocar, se necessário, linhas em $[A|b]$ de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes
  - Usando operações elementares do tipo I ("Apagador") e o pivot da primeira linha, eliminar os restantes elementos da coluna abaixo desse pivot
  - Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz

No final da fase descendente obtém-se uma matriz $[A'|b']$ com A' em escada e podemos classificar o sistema.

A matriz $[A'|b']$ **não é única**, i.e, depende das operações efetuadas.

Classificação do sistema em escada



Variáveis *pivot* e variáveis livres

Observação

- As variáveis associadas às colunas sem *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis livres e podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$.
- As variáveis associadas às colunas com *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis *pivot* ou variáveis determinadas e são escritas em função das variáveis livres.

Algoritmo de eliminação de Gauss: fase ascendente

- **Fase ascendente:** (apenas se aplica aos sistemas possíveis)
  - Usando operações elementares do tipo II e I tornar o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' igual a 1 e usar esse pivot para eliminar os elementos da coluna acima desse pivot
  - Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda)

No final da fase ascendente obtém-se uma matriz $[A''|b'']$ com A'' reduzida, donde resulta imediatamente o CS do sistema, escrevendo as variáveis pivot em função das variáveis livres. Observemos que:

- A matriz $[A''|b'']$ é **única**, isto é, não depende da sequência de operações elementares efectuada
- Dois sistemas com m equações lineares e n variáveis são **equivalentes** se e só se aplicando o método de Gauss às respetivas matrizes ampliadas obtemos **a mesma matriz reduzida**.

Método de eliminação de Gauss

Exercícios na aula

Aplicando o método de Gauss reduza os seguintes sistemas lineares:

(a) $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ -2x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & -3 \end{array}\right.$$

(b) $$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Redução do sistema do exemplo (a): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do 1º sistema do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3+L_1]{L_2-2L_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3-4L_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em **escada**, tendo-se:

- Não há linhas do tipo $0\ 0\ 0\ 0 \,|\, *$ com $* \neq 0$, isto é, não há equações impossíveis.
- A 4ª coluna de A' não tem pivot logo x_4 é variável livre, isto é, pode tomar qualquer valor.

Logo o sistema é **possível indeterminado** (PI).

Redução do sistema do exemplo (a): fase ascendente

Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss à matriz $[A'|b']$ anterior obtém-se:

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A''|b''] \dashrightarrow \begin{cases} x_1 & & & = 1 \\ & x_2 & -x_4 & = -1 \\ & & x_3 + x_4 & = 1 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes A'' está em **reduzida**. Passando nas duas últimas equações a variável livre x_4 para o membro direito, podemos escrever as variáveis *pivot* (a azul) à custa da variável livre x_4, obtendo-se

$$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = 1, \ x_2 = -1 + x_4, \ x_3 = 1 - x_4, \ x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Redução do exemplo (b): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do 2º sistema do slide 45 obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

- A última linha da matriz $[A'|b']$ é do tipo $0\ 0\ 0 \,|\, *$ com $* \neq 0$ e corresponde portanto a uma equação impossível.

Logo o sistema é **impossível** (IMP).

A equação matricial $Ax = b$

- Consideremos a equação matricial $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Tem-se,

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 6x_2 & = & 10 \end{cases}. \end{aligned}$$

- Obteve-se uma relação importante - a equação matricial $Ax = b$ é equivalente ao sistema linear cuja matriz ampliada é $[A|b]$

Sistemas lineares via equações matriciais

Efetuando o mesmo tipo de cálculos pode-se mostrar facilmente que se tem, em geral, a equivalência

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b,$$

com $A = [a_{ij}]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_m)$, isto é, entre o sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ e a equação matricial $Ax = b$, o que permite traduzir os sistemas lineares para a linguagem das matrizes.

Observações

- Por abuso de linguagem, iremos ainda designar por sistema linear tanto a equação matricial $Ax = b$ como a respetiva a matriz ampliada $[A|b]$.
- Uma solução do sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ é uma solução de $Ax = b$, isto é, um vetor $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $Au = b$.

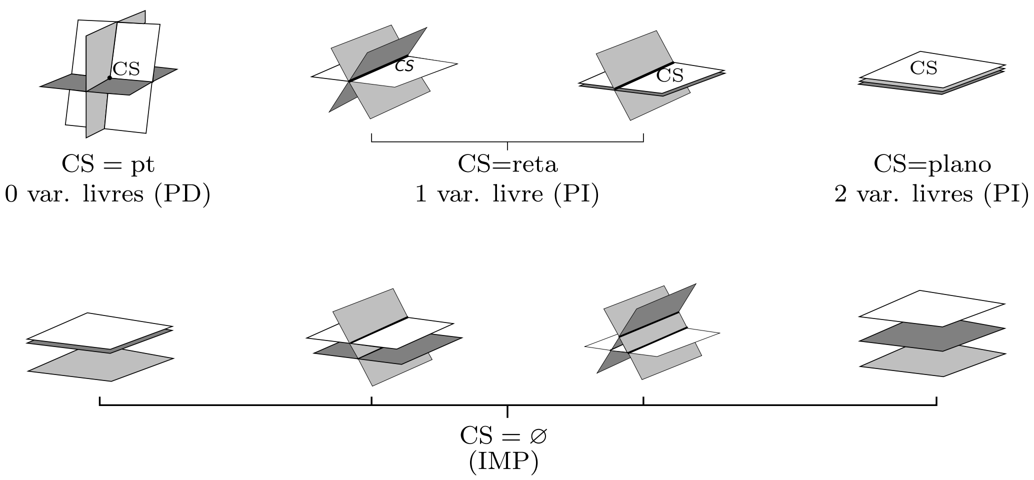
TPC: traduzindo o sistema do slide 49 para a equação matricial equivalente, mostre que $(2, 1 - 1)$ é solução desse sistema.

Interpretação geométrica dos sistemas de equações lineares

- Geometricamente um sistema linear a m equações e n variáveis representa a intersecção de:
  - m retas em $\mathbb{R}^2$ (plano), se $n = 2$,
  - m planos em $\mathbb{R}^3$ (espaço), se $n = 3$,
  - m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$.
- O número de variáveis livres de um sistema linear (possível) determina o tipo de CS que esse sistema possui. Por exemplo:
  - Se o número de variáveis livres for zero, o CS é um **ponto**
  - Se o número de variáveis livres for um, o CS é uma **reta**
  - Se o número de variáveis livres for dois, o CS é um **plano**
- Iremos estar principalmente interessados em interpretar geometricamente os sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, cujos CS estão contidos no plano ($\mathbb{R}^2$) e no espaço ($\mathbb{R}^3$).

Exemplo: geometria dos sistemas lineares a 3 equações e 3 incógnitas

- Geometricamente existem os 8 casos distintos representados na seguinte figura:



TPC

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores