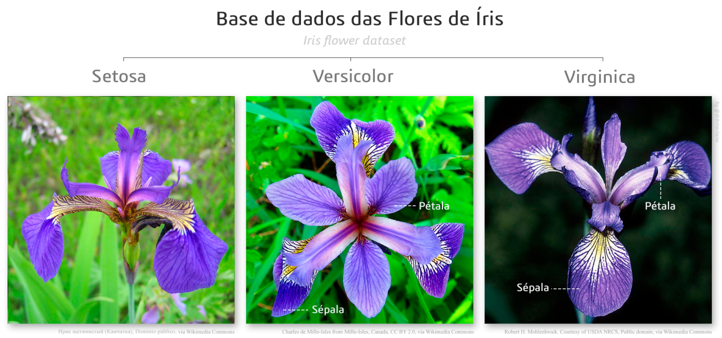
Notas prévias e convenções utilizadas

- Os slides de apoio às aulas teóricas baseiam-se na matéria da sebenta Texto de Apoio de Álgebra Linear, e vários dos seus esquemas e/ou figuras provêm da sebenta ou são versões modificadas de esquemas e figuras da sebenta.
- A matéria exposta nestes slides deve ser complementada com a leitura dessa sebenta.
- Vamos escrever a vermelho as definições, a azul o texto a destacar e a magenta os exercícios e desafios para os alunos.

Um pequeno exemplo para motivar :)

Um famoso conjunto de dados foi obtido por Ronald Fisher medindo o comprimento e a largura das sépalas e pétalas (em cm) de 50 lírios de cada de 3 espécies distintas, *Setosa*, *Versicolor* e *Virgínica*



Autor Diego Mariano https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_dados_flor_Iris#/media/Ficheiro:Flores_de_Íris.png

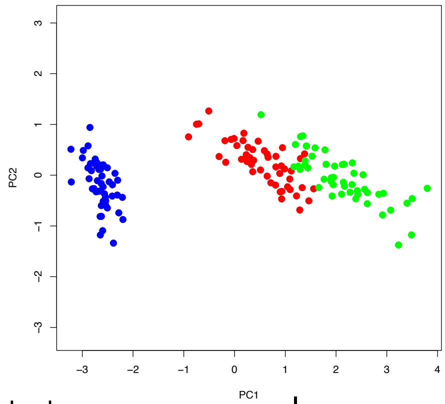
A tabela a seguir apresenta os valores obtidos para alguns dos lírios.

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
150	5.9	3.0	5.1	1.8	virginica

O melhor retrato do conjunto de dados dos lírios

O conjunto de dados dos 150 lírios origina uma núvem de 150 pontos num espaço a 4 dimensões que não conseguimos visualizar, em que o vetor de coordenadas de cada ponto contém o comprimento e a largura das sépalas e pétalas de cada lírio (vetor com 4 componentes).

Usando métodos de Álgebra Linear podemos projetar esta núvem de pontos num plano de modo a obter-se o melhor retrato possível (num certo sentido):



Pode-se observar no retrato que, por exemplo, os comprimentos e as larguras das sépalas e pétalas diferenciam claramente os lírios da espécie *Setosa* dos lírios das restantes 2 espécies *Versicolor* e *Virgínica*...

O conjunto $\mathbb{R}^n$

- Recordemos que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- O conjunto dos vetores do plano é o conjunto dos vetores com 2 componentes reais que se denota por $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

  Por exemplo, $(1, -\pi) \in \mathbb{R}^2$
- Analogamente, o conjunto dos vetores do espaço é o conjunto dos vetores com 3 componentes reais, denotado $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

  Por exemplo, $(1, -\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$
- Vamos trabalhar com vetores com um número arbitrário de componentes reais: dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos o conjunto dos vetores com n componentes reais por $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\Big\}$$

  x_i: componente do vetor x que se encontra na posição i

  Por exemplo, se $x = (1, -\pi, 0, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$, $x_4 = 2$

Operações sobre vetores do plano

Recordemos as operações algébricas bem conhecidas sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$). Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

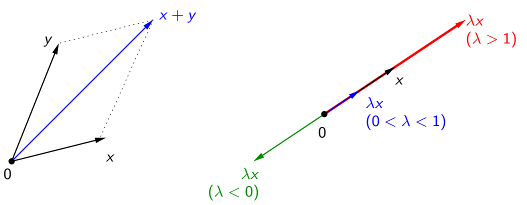
- Adição de vetores:
$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

- Produto de um vetor por um escalar:
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

- Produto escalar (ou interno) de vetores:
$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Por exemplo, se $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$ e $\lambda = 2$, obtém-se
$$x + y = (5, 6), \quad 2(3, 2) = (6, 4), \quad (3, 1) \cdot (2, 5) = 11.$$

Interpretação geométrica das operações sobre vetores



(a) (b)

Recordemos que o produto escalar está relacionado com o cosseno do ângulo θ formado pelo 2 vetores pela relação bem conhecida,

$$x \cdot y = \cos(\theta)\, \|x\|\, \|y\|,$$

onde $\|x\|$ e $\|y\|$ representam os comprimentos do vetores x e y.

A extensão das operações algébricas anteriores para vetores com um número arbitrário de componentes faz-se de modo óbvio.

Operações sobre vetores de $\mathbb{R}^n$

Definição

- Adição de vetores:

$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

isto é, somam-se as componentes homólogas dos vetores

- Produto de um vetor por um escalar:

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, \lambda x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

isto é, multiplicam-se todas as componentes do vetor pelo escalar

- Produto escalar (ou interno) de vetores:

$$x \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Dar exemplos em $\mathbb{R}^4$ para as 3 operações anteriores.

Propriedades das operações sobre vetores

Adição de vetores e o produto de vetores por escalares verificam várias propriedades que decorrem imediatamente das propriedades dos números reais (falaremos mais adiante nas propriedades do produto escalar).

Propriedades das operações algébricas

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos...)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Conceito de matriz

Os números reais serão também designados por *escalares* por oposição a vetores

Definição de matriz

Sejam m, n inteiros positivos. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ *a uma coleção $A = [a_{ij}]$ de mn números reais dispostos em m linhas e n colunas,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

a_{ij}: *elemento da matriz que se encontra na linha i e coluna j da matriz*

O índice i percorre as linhas da matriz e designa-se por índice de linha *O índice j percorre as colunas da matriz e designa-se por* índice de coluna

As matrizes constituem uma extensão dos vetores adequada ao estudo dos sistemas lineares

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

  O elemento de A que se encontra na linha 4 e coluna 1 é a_{41} =5

- $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ definida por $a_{1j} = 10$ e $a_{2j} = \pi$, para todo o j, é

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $i, j = 1, 2, 3$, é

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz-linha e matriz-coluna ou vetor

- Se $m = 1$, $A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-linha*.
  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matriz-linha do tipo 1×3.
- Se $n = 1$, $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-coluna* ou *vetor*.
  Por exemplo, $(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
  - Em geral, $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser representado como m-uplo de números reais ou como matriz-coluna do tipo $m \times 1$:

$$x = (x_1, \cdots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Matriz definida por vetores e matriz quadrada

- Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ denota a matriz do tipo $m \times n$ cujas colunas são os n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.
  Por exemplo, se $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 10, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

- Se uma matriz A é do tipo $n \times n$, A diz-se *quadrada de ordem n*.
  Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ anterior é quadrada de ordem 3.
  - Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ ao conjunto dos elementos a_{ii}, $i = 1, \dots n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular e matriz diagonal

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada de ordem n

- A diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior de ordem 3.

- A definição de *triangular inferior* é análoga e fica como exercício.

- A diz-se *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, se todos os elementos fora da diagonal principal de A forem nulos, e pode ser representada por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

  Por exemplo, $\text{diag}(2, -1, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3.

Matriz escalar e matriz identidade

- Uma matriz diagonal A de ordem n diz-se *escalar* se todas as entradas da diagonal principal forem iguais entre si, isto é, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Se $\lambda = 1$, A designa-se por *matriz identidade de ordem n* e denota-se por I_n (ou simplesmente por I). A matriz identidade representa o elemento neutro da multiplicaçãoo de matrizes como veremos mais adiante

  Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 é a matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade entre matrizes e matriz transposta

- $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo dizem-se *iguais* se os elementos homólogos forem iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 2 & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ w = 6 \end{cases}$

- A *transposta* de $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ do tipo $n \times m$, cujas colunas são as linhas de A pela mesma ordem.

  Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

  Tem-se, obviamente, $(A^T)^T = A$.

- $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se *simétrica*, se $A^T = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Operações algébricas sobre matrizes: adição de matrizes

As operações algébricas sobre matrizes estendem as operações da adição de vetores, do produto de um vetor por um escalar e do produto escalar de vetores definidas anteriormente.

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são matrizes do mesmo tipo define-se a *soma de A com B*, por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Por outras palavras, os elementos de $A + B$ obtêm-se somando os elementos homólogos de A e de B.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+2 & 0+1 \\ 4-3 & 5+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ define-se o *produto de A pelo escalar* λ, por

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Por outras palavras, λA obtém-se multiplicando cada elemento de A por λ

Se $\lambda = -1$, λA denota-se simplesmente por $-A$

Por exemplo, se $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix}$, então

$$\lambda A = 3 \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 20 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 13 \\ 3 \cdot 18 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -3 & 39 \\ 54 & -6 & 243 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes e do produto de escalares por matrizes

Sejam A, B e C matrizes do tipo $m \times n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + [0]_{m \times n} = A$ ($[0]_{m \times n}$ matriz cujos elementos são todos nulos)
4. $A + (-A) = [0]_{m \times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1.A = A$
9. $(A + B)^T = A^T + B^T$
10. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
11. $(A^T)^T = A$

Propriedades das operações algébricas sobre matrizes

A matriz nula $[0]_{m\times n}$ é portanto o elemento neutro da adição de matrizes.

As propriedades (1)-(8) decorrem das propriedades da adição e do produto de números reais e são análogas às propriedades da adição e do produto por escalar para vetores.

As restantes três propriedades são evidentes.

Exercício na aula

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 a matriz identidade de ordem 2. Simplifique expressão $((A^T + B)^T + 4I_2)^T$ indicando as propriedades do slide anterior que utilizar e calcule o seu valor.

TPC

Mostre que se A é uma matriz quadrada então $A + A^T$ é simétrica.

Produto de matrizes

- Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas* se

número de colunas de A = número de linhas de B.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ são encadeadas pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Mas B e A não são encadeadas !

Definição do produto de matrizes

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ são encadeadas, define-se o *produto* de A por B, denotado AB, como sendo a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ik} &= (\text{linha } i \text{ de } A) \cdot (\text{coluna } k \text{ de } B) \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}. \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ são encadeadas, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ \hline 4 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 8 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} 2+8+0 & -2+16-5 \\ 4+10+0 & -4+20+0 \\ 1+16+0 & -1+32+25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & 16 \\ 17 & 56 \end{bmatrix}_{3\times 2} \end{aligned}$$

Por exemplo, o elemento de AB que se encontra na linha 3 e coluna 1 é o produto escalar da terceira linha de A pela primeira coluna de B, isto é, $(1, 8, 5) \cdot (1, 2, 0) = 17$.

Produto escalar via produto de matrizes...

- O produto de matrizes estende o conceito de produto escalar de vetores: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então

$$\boxed{x^T y = x \cdot y}$$

Por exemplo, se $x = (-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $y = (1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$x^T y = [-1 \;\; 1 \;\; 3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = (-1, 1, 3) \cdot (1, 0, 1) = 2 = x \cdot y$$

- Note-se que $xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} [1 \;\; 0 \;\; 1]_{1\times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

Potência de uma matriz quadrada

Potência inteira não negativa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n definem-se as *potências inteiras não negativas de A* por,

$$A^0 = I_n \qquad \text{e} \qquad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k vezes}} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

TPC

Calcular A^3 com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Propriedades

Propriedades do produto de matrizes

Sejam A, B, C matrizes, I a matriz identidade de ordem conveniente, [0] a matriz nula de tipo conveniente e $\lambda \in \mathbb{R}$ e k um inteiro não negativo. Sempre que as operações estejam definidas, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva)
4. $AI = IA = A$ (el. neutro da mult.)
5. $A[0] = [0]A = 0$ (el. absorvente da mult.)
6. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (compatibilidade dos produtos)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ (!)
8. $(A^k)^T = (A^T)^k$

“Não propriedades” do produto de matrizes

Ao contrário do que sucede com a adição, algumas propriedades do produto de números reais **não se generalizam** para o produto de matrizes.

Exercício na aula

Calcular os produtos AB e BA com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

O que observa ?

“Não propriedades” do produto de matrizes

- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, em geral,
$$AB \neq BA.$$
- A lei do anulamento do produto também não é válida, ou seja, em geral,
$$AB = [\,0\,] \quad \not\Rightarrow \quad (A = [\,0\,] \text{ ou } B = [\,0\,]).$$
- A lei do corte também não é válida, ou seja, em geral, dadas matrizes A, B e C, com $A \neq [\,0\,]$,
$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C.$$

(aqui $[\,0\,]$ denota uma matriz nula de ordem conveniente)

TPC

Dar exemplos de 3 matrizes quadradas de ordem 2, A, B e C, para as quais a lei do corte falhe

Uma consequência inesperada...

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem não permutáveis, isto é, $AB \neq BA$, obtém-se aplicando as propriedades distributivas do produto de matrizes,

- $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$.
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

A não comutatividade do produto de matrizes teve como consequência que não são válidos para o produto de matrizes quadradas os análogos dos casos notáveis da multiplicação de números reais!

Observação

Deve-se ter uma particular atenção ao simplificar expressões que envolvam produtos de matrizes!

Simplificação de expressões...

Exercício na aula

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Simplifique e calcule $((BC)^T + A)^2$.

Ainda o produto de matrizes...

Observação

Se $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix}$ então

$$AB = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_p \end{bmatrix},$$

ou seja, a k-ésima coluna do produto AB é o produto de A pela k-ésima coluna de B.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ \ v_2]$ com $v_1 = (-1, 0, 3)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix}$$

De facto,

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Av_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sistema de equações lineares

Sistema linear

Um sistema linear a m equações lineares e n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de equações forma,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: *coeficiente da variável x_j na i-ésima equação.*
- $b_i \in \mathbb{R}$: *termo constante* ou *membro direito* da i-ésima equação.

- *Solução* de um sistema linear é uma solução comum a todas as equações desse sistema.

Exemplo de um sistema linear a 3 equações e 3 variáveis

$$\begin{cases} 2\,x_1 + \,x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 + 6\,x_3 = 4 \\ -2\,x_1 \qquad\quad - \,x_3 = -3 \end{cases}$$

Com a notação do slide anterior tem-se, por exemplo,

- $a_{11} = 2$: coeficiente da variável x_1 na primeira equação
- $a_{23} = 6$: coeficiente da variável x_3 na segunda equação
- $b_2 = 4$: termo constante ou membro direito da segunda equação
- $b_3 = -3$: termo constante ou membro direito da terceira equação

Conjunto de soluções e classificação de um sistema linear

Resolver um sistema linear é determinar o seu conjunto de soluções (CS).
Um sistema linear é *classificado* como:

- **impossível** (IMP) se não possuir soluções
- **possível** se possuir pelo menos uma solução, sendo:
  - **determinado** (PD), se possuir uma única solução
  - **indeterminado** (PI), se possuir uma infinidade de soluções

Por exemplo, o sistema linear a 2 equações e 2 variáveis,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

é PD com $CS = \{(2,1)\}$ (verifique!).

TPC

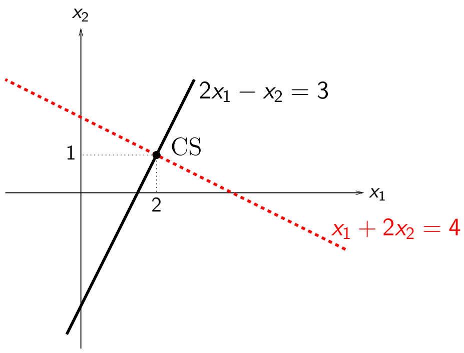
Adaptando o sistema linear anterior dê exemplos de sistemas lineares a 2 equações e 2 variáveis que sejam PI e IMP, indicando em cada caso o respectivo CS.

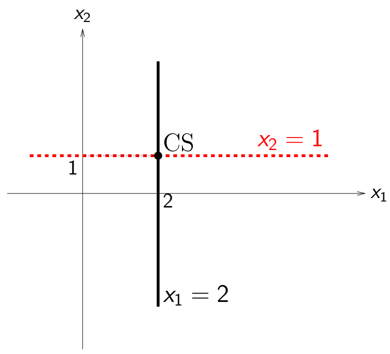
Sistemas equivalentes

- Dois sistemas lineares a m equações e n variáveis dizem-se *equivalentes* se possuem o mesmo conjunto de soluções (CS).

São equivalentes os seguintes sistemas a 2 equações e 2 variáveis:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 \qquad &= 2 \\ \qquad x_2 &= 1 \end{cases} \text{ (sistema reduzido)}$$





- As equações de quaisquer duas retas concorrentes no ponto $(2, 1)$ definem um sistema linear equivalente aos sistemas anteriores.

Matriz ampliada de um sistema a m equações e n variáveis

Consideremos o sistema linear a m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ chama-se *matriz dos coeficientes* do sistema linear,
- $b = (b_1, \dots, b_m)$ chama-se o *vetor dos termos constantes* ou *membros direitos* do sistema,
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ chama-se *vetor das incógnitas* ou *variáveis* do sistema e finalmente,
- $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, chama-se *matriz ampliada do sistema* e contém toda a sua informação relevante

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se em *escada* se o primeiro elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior e todas as linhas nulas, caso existam, aparecerem no fim
- Uma matriz diz-se *reduzida* se
  - estiver em escada,
  - todos os pivots forem iguais a 1,
  - em cada coluna com pivot apenas o pivot é não nulo.

Exemplos de matrizes em escada e reduzida com os pivots a vermelho,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Um sistema linear diz-se em *escada/reduzido* se a respectiva matriz dos coeficientes estiver em escada/reduzida.

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

(I) "Apagador" - Adicionar a uma linha i uma linha $j \neq i$ multiplicada por um escalar λ ($L_i + \lambda L_j$).

(II) Multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \neq 0$ (λL_i).

(III) Permutar uma linha i com uma linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

A notação entre parênteses difere da notação usada no Texto de Apoio.

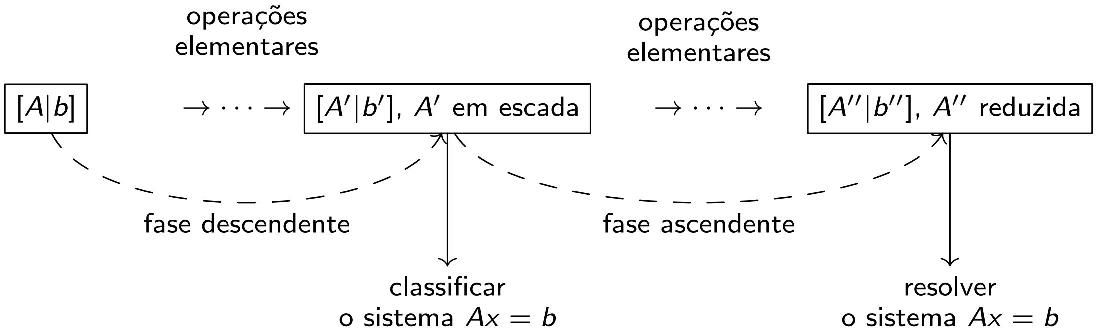
Teorema

As operações elementares (I), (II) e (III) transformam a matriz ampliada de um sistema linear na matriz ampliada de um sistema linear equivalente, ou seja, com o mesmo CS.

Definem-se de modo análogo operações elementares sobre as equações de um sistema linear.

Método de eliminação de Gauss para redução de sistemas

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases (descendente e ascendente), aplicando operações elementares à matriz ampliada de um sistema linear $[A|b]$, de acordo com o seguinte esquema:



Exemplificação do método de Gauss

Exemplo na aula

Vejamos como se processa o método de eliminação de Gauss no sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 + 6x_2 & = & 10 \end{array}\right.$$

que representa a intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$.

TPC

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \left\{\begin{array}{rcr} 2x_1 + x_2 + 2x_3 & = & 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 & = & 4 \\ -2x_1 - x_3 & = & -3 \end{array}\right. \qquad (b) \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$