Algoritmo da inversa

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Qual é a solução do sistema linear $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: ver o slide 61.)

Resolução aplicando o algoritmo da inversa

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A'\,|\,I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e não tem linhas nulas. Logo A é invertível. Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss vem,

$$\begin{aligned} [\,A'\,|\,I'\,] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\,I\,|\,A^{-1}\,]. \end{aligned}$$

Podemos confirmar que A^{-1} está bem calculada verificando a relação $AA^{-1} = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & o \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

O vetor $(1, 0, 0)$ é a 1ª coluna da matriz identidade, que denotámos por e_1.
Logo a solução de $Ax = e_1$ é a primeira coluna de A^{-1}, isto é, $(-1, 0, -1)$.

Caso particular: inversa de matrizes diagonais

Efetuando trocas de linhas conclui-se facilmente que qualquer matriz em escada A' obtida a partir de uma matriz diagonal,

$$A = \mathrm{diag}(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

não tem linhas nulas se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$. Nessa altura, podemos obter imediatamente a inversa de A.

Proposição

A matriz $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é invertível se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, tendo-se nessa caso

$$\mathrm{diag}^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

Por exemplo,

$$\mathrm{diag}^{-1}(2, 5, \pi) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\pi} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{\pi}).$$

Interlúdio: característica de uma matriz

Definição de característica

A característica de uma matriz A, denotada $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivots de qualquer matriz em escada que seja obtida a partir de A, por aplicação de operações elementares do método de eliminação de Gauss nas linhas de A.

- A característica está bem definida uma vez que coincide com o número de pivots da matriz reduzida, que é única, e a fase ascendente do método de Gauss não altera o número de pivots.
- $\mathrm{car}(A)$ corresponde também ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada obtida a partir de A.
- Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m\times n}$ não pode ultrapassar o número de linhas m nem o número de colunas n de A, isto é,
$$\mathrm{car}(A) \leq \min\{m, n\}.$$
- Pode-se provar que para qualquer matriz $A_{m\times n}$ se tem a relação:
$$\mathrm{car}(A^T) = \mathrm{car}(A).$$

Exemplo

- Se, por exemplo,

$$A_{4\times 5} \to \overset{\text{oper. elementares}}{\cdots} \to A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5},$$

tem-se $\text{car}(A) = 3 \leq \min\{4, 5\}$.

Questão

Considerando a mesma matriz A do exemplo acima, qual seria o número de linhas nulas de uma matriz em escada obtida que fosse obtida a partir de A^T por aplicação de operações elementares?

Inversa e característica

Uma vez que uma matriz **quadrada** em escada só possui linhas nulas se existirem colunas sem pivot, obtém-se imediatamente o seguinte critério de invertibilidade.

Teorema (critério de invertibilidade)

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Exercício na aula

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Resolução: Aplicando a fase descendente do método de Gauss tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 2\alpha & 6+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que $A_{3\times 3}$ é ínvertível se e só se $\text{car}(A) = 3$ se e só se $\alpha \neq 0, 2$.

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, admite a solução única $x = \frac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$.
- A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Proposição

Se A é uma matriz invertível então o sistema linear $Ax = b$ é PD com solução única $x = A^{-1}b$ qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^n$.

De facto, se A é invertível, existe A^{-1} e podemos escrever, multiplicando à esquerda ambos da equação matricial $Ax = b$ 'por A^{-1},

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad I\,x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Hors-d'oeuvre: transformações lineares

Uma matriz $A_{m\times n}$ define uma transformação $L = L_A$,

$$\begin{aligned} L:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto A\,x \end{aligned}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$, obtém-se a transformação linear $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$L(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}.$$

Vejamos alguns casos de transformações lineares que definem transformações geométricas do plano e do espaço bem conhecidas ([7])

---

[7] Nem todas as transformações geométricas do plano e do espaço podem ser definidas a partir de matrizes como acima.

Transformações geométricas no plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$

Algumas transformações geométricas do plano definidas por matrizes $A_{2\times 2}$:

- Se $A = \alpha I_2$ com $\alpha > 0$obtém-se a homotetia no plano de razão α:
$$H_\alpha(x) = (\alpha I_2)x = \alpha x,$$
que corresponde uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha > 1$].
- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, a simetria em relação à bissectriz dos quadrantes ímpares:
$$S(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$
- Se $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se a rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos (no sentido anti-horário):
$$R(x) = Ax = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$
- Mais geralmente, se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radianos (no sentido anti-horário): $R_\theta(x) = Ax$.
- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se a projeção no eixo dos xx:
$$P(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Transformações geométricas no espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$

Algumas transformações geométricas do espaço definidas por matrizes $A_{3\times 3}$:

- Se $A = \alpha I_3$ com $\alpha > 0$ obtém-se a homotetia no plano de razão α:
$$H_\alpha(x) = (\alpha I_3)x = \alpha x,$$
que corresponde uma dilatação [contração] se $\alpha > 1$ [$\alpha > 1$].
- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, obtém-se a simetria em relação ao plano xOy:
$$S(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}$$
- Se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtém-se a rotação de θ radiano em torno do eixo dos zz (no sentido anti-horário):
- Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ obtém-se a projeção no plano dos xOy:
$$P(x) = Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$