Base de um subespaço vetorial

Vamos dar agora aquele que é, possivelmente, o **conceito mais central em Álgebra Linear**.

Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto de vetores de V tal que: (i) não contém vetores "redundantes" no sentido em que nenhum dos vetores da base se pode obter como CL dos restantes vetores da base; (ii) todo o vetor do subespaço V é CL linear dos vetores da base.

Mais precisamente, temos a seguinte definição.

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $\underline{v_1, \ldots, v_k \in V}$. Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base** de V se verificar as condições:

(i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

(ii) $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = V$, isto é, $v_1, \ldots, v_k$ geram V.

Exemplo fundamental: base canónica de $\mathbb{R}^m$

Vejamos que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$, onde $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$ são as colunas da matriz identidade de ordem 3:

(i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente.
De facto, a matriz $A = [\, e_1 \;\; e_2 \;\; e_3 \,]$ é a matriz identidade de ordem 3, I_3, que já está em escada e possui todas as colunas com pivot.

(ii) $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.
De facto, tem-se para qualquer $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}(b_1, b_2, b_3) &= b_1(1,0,0) + b_2(0,1,0) + b_3(0,0,1) \\ &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.\end{aligned}$$

Logo qualquer $b \in \mathbb{R}^3$ é CL de e_1, e_2 e e_3 e portanto $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle = \mathbb{R}^3$.

A base anterior generaliza-se para $\mathbb{R}^m$ com m arbitrário.

Base canónica de $\mathbb{R}^m$

O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ formado pelas m colunas da matriz identidade I_m,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\; e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\; \ldots, e_m = (0, 0, \ldots, 1),$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^m$ que se designa por base canónica (b.c.).

Dimensão de um subespaço vetorial

Teorema-definição

Todas as bases de um mesmo subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores a que chamamos dimensão de V e denotamos por $\dim V$.

Dimensão do subespaço minimal

- Convenciona-se que $\{\}$ é a base do subespaço mininal $\{\vec{0}\}$. Uma vez que esta base não possui vetores tem-se,

$$\boxed{\dim\{\vec{0}\} = 0}$$

Dimensão do subespaço maximal

- Vimos que $\mathbb{R}^m$ admitia uma base especial, dita base canónica, constituída pelas m colunas da matriz identidade de ordem m. Daqui resulta que,

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^m = m}$$

- Logo qualquer outra base para $\mathbb{R}^m$ também possui m vetores.

Caracterização das bases do subespaço maximal

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$ e consideremos $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_m]$ que é uma matriz quadrada de ordem m. Seja A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares. Uma vez que A' é também uma matriz **quadrada** obtêm-se, aplicando os resultados dos slides 108 e 101, as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned}
\{v_1, \ldots, v_m\} \text{ lin. indep.} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{todas as colunas de } A' \text{ têm pivot} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{não há linhas nulas em } A' \\
&\Leftrightarrow \quad \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m.
\end{aligned}$$

Logo por definição de base provámos o seguinte resultado.

Teorema (Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^m$)

Sejam $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é base de $\mathbb{R}^m$.
- $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é linearmente independente.
- $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \mathbb{R}^m$.

Bases de subespaços maximais - exemplo

Pelo teorema do slide anterior e pelo resultado do slide 110 tem-se o seguinte resultado.

Observação

As bases de $\mathbb{R}^m$ são os conjuntos linearmente independentes com m vetores, ou seja, os conjuntos lin. indep. de cardinalidade máxima([10]).

Exemplo na aula

Quais dos seguintes conjuntos são lin. indep. / geram $\mathbb{R}^3$ / base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,0,0),(2,5,0)\}$. (S / N / N)
2. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,0)\}$. (N / N / N)
3. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9)\}$. (S / S / S)
4. $\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9),(10,11,12)\}$. (N / S / N)

[10] E são também os conjuntos de geradores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade mínima.

Construção de bases para subespaços vetoriais

Um subespaço vetorial V pode ser definido de duas formas distintas:

- *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas* / *espaço nulo de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-x_2+2x_3=0,\ 3x_1+x_2+x_3=0, 2x_1+6x_2=0\}$,

    ou seja, $\quad V=\mathcal{N}(A), \quad \text{com } A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

- *Gerado por um conjunto de vetores* / *espaço das colunas de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V=\langle(1,1,0,1),(1,2,-1,0),(1,0,1,2),(2,1,1,3)\rangle$,

    ou seja, $\quad V=\mathcal{C}(A), \quad \text{com } A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercício

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

TPC

Determinar uma base do hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Resolução do exercício do slide anterior

Reduzindo a matriz $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ obtém-se (verifique),

$$[\,A\,|\,\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_1 \quad\quad 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Tem-se que $\mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$ uma vez que existem variáveis livres (x_3 e x_4), obtendo-se,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 = x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2\,x_3, x_3, x_3, 0) + (-4\,x_4, x_4, 0, x_4) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \underbrace{\{x_3(-2,1,1,0) + x_4(-4,1,0,1) :\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\}}_{\text{todas as somas de múltiplos de } (-2,1,1,0) \text{ e } (-4,1,0,1)} \\ &= \langle(-2,1,1,0), (-4,1,0,1)\rangle = \langle v_1, v_2\rangle \end{aligned}$$

Logo $\mathcal{N}(A) = \langle v_1, v_2\rangle$. Como v_1 e v_2 não são múltiplos entre si, $\{v_1, v_2\}$ é lin. indep.
Logo por definição $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) =$ nº de vetores da base $= 2$.

Observações

- O processo descrito no slide anterior para determinar uma base de $\mathcal{N}(A)$, pode ser generalizado para uma matriz A arbitrária (desde que o sistema $Ax = \vec{0}$ possua variáveis livres) e conduz sempre a bases de $\mathcal{N}(A)$, não sendo necessário provar que o conjunto é linearmente independente.

- O primeiro vetor da base do slide anterior, $v_1 = (-2, 1, 1, 0)$, corresponde à solução do sistema $Ax = \vec{0}$ considerando a variável livre $x_3 = 1$ e a variável livre $x_4 = 0$. De facto,

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3 = 1 \\ x_4 = 0}} (-2, 1, 1, 0) = v_1.$$

Analogamente, o segundo vetor da base, $v_2 = (-4, 1, 0, 1)$, corrresponde à solução do sistema $Ax = \vec{0}$ com $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$:

$$(-2\,x_3 - 4\,x_4, x_3 + x_4, x_3, x_4) \xrightarrow{\substack{x_3 = 0 \\ x_4 = 1}} (-4, 1, 0, 1) = v_2.$$

Base para o espaço nulo de uma matriz - algoritmo

Algoritmo

`Input:` Matriz A do tipo $m \times n$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{N}(A)$.

- Resolver o sistema $Ax = \vec{0}$ aplicando o método de Gauss a $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$.
  Seja k o número de variáveis livres do sistema.

- Se $k = 0$, isto é, se não há variáveis livres então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

- Se $k > 0$, associamos alternadamente a cada variável livre a solução do sistema em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.

  O conjunto das k soluções de $Ax = \vec{0}$ obtidas deste modo constitui uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular,

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \text{n}^{\text{o}} \text{ de variáveis livres} = n - \text{car}(A)}$$