Base para espaço nulo de uma matriz - exercício 2

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há colunas sem pivot em A', isto é, não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$.

Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Base para o espaço de colunas - exercício

Vamos agora ver como se podem determinar bases para o espaço de colunas de uma matriz.

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão para o espaço nulo das colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \,].$$

Resolução: aplicando a fase descendente a $[\, A \mid b \,] = [\, v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4 \mid b \,]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -2 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b_1 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + b_2 + 2b_3 \end{array}\right].$$

Logo para o sistema $Ax = b$ ser possível, $b_1 + b_2 + 2b_3 = 0$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{b = (b_1, b_2, b_3) \; : \; b_1 + b_2 + 2b_3 = 0\}.$$

Base para o espaço de colunas - exercício (concl.)

Observação

- A sequência efetuada de operações elementares do método de Gauss apenas depende das colunas que estão associadas às colunas com pivot na matriz em escada.
- As colunas sem pivot em A' não têm influência na discussão do sistema em escada $[\,A' \mid b'\,]$.

De facto, se tivéssemos aplicado a fase descendente a $[\,v_1 \;\; v_3 \mid b\,]$ obtinha-se

$$\left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ -1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_1+b_3 \\ 0 & 0 & b_1+b_2+2b_3 \end{array}\right],$$

e portanto,

$$\langle v_1, v_3\rangle = \{b=(b_1,b_2,b_3) \,:\, b_1+b_2+2b_3=0\} = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle,$$

o que mostra que os vetores v_2 e v_4, que estão associados às colunas sem pivot em A', são redundantes. Como v_1 e v_3 geram $\mathcal{C}(A)$ e $\{v_1, v_3\}$ é linearmente independente, porque estão associados às colunas com pivot em A', conclui-se que $\{v_1, v_3\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ contida no conjunto inicial de geradores.

Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = \text{n}^{\text{o}}$ pivots em $A' = 2$.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - algoritmo

Pode-se mostrar que dados $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [v_1 \; v_2 \cdots \; v_n] \to A'$ com $\text{car}(A) = k$, se tem, mais geralmente,

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\rangle,$$

onde $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ são as k colunas de A associadas às colunas com pivot em A'. Em particular $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$ é l.i. Logo tem-se o seguinte.

Algoritmo

`Input:` $A = [\,v_1 \;\; \cdots \;\; v_n\,]$ com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.
`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A:
  $$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- O subconjunto das colunas de A que correspondem às colunas com pivot em A' constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$, contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \ldots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \langle v_1, \ldots, v_n\rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \text{car}(A).}$$

Voltando novamente ao exercício anterior...

- Aplicando o algoritmo à matriz do exercício do slide 124 (não é necessário ampliar com o vetor genérico b), deduz-se que $\{v_1, v_3\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ (porque v_1, v_3 são as colunas de A associadas às colunas com pivot em A'), contida no conjunto inicial de geradores v_1, v_2, v_3, v_4, tendo-se $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A) = 2$.
- Alternativamente, pode-se determinar uma base para $\mathcal{C}(A)$ começando por determinar um sistema de equações definidoras para $\mathcal{C}(A)$ e depois uma base para o espaço nulo da matriz definida por esse sistema, base essa que já não está necessariamente contida no conjunto inicial de geradores.

  Voltando ao exercício do slide 124, tem-se que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}([1\ 1\ 2])$ obtendo-se a base de $\mathcal{C}(A)$, $\{(-1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$. Deixa-se aos alunos como exercício preencherem os detalhes do cálculo da base de $\mathcal{C}(A)$ por este 2º método.
- A característica de uma matriz A é muitas vezes definida, de forma equivalente, como $\dim \mathcal{C}(A)$.

Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A. Pelos resultados do sildes 122 e 126 tem-se:
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}(A)$ (nº de colunas sem pivot em A').
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$ (nº de colunas com pivot em A').
- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.}$$

Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define
- Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se

	subespaços vetoriais	dimensão
$\mathbb{R}^2$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	$\mathbb{R}^2$	2
$\mathbb{R}^3$	$\{\vec{0}\}$	0
	retas que passam na origem	1
	planos que passam na origem	2
	$\mathbb{R}^3$	3

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^m$ com m arbitrário, em função das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\} \;\Leftrightarrow\; \dim V = 0$.
- $V = \mathbb{R}^m \;\Leftrightarrow\; \dim V = m$.