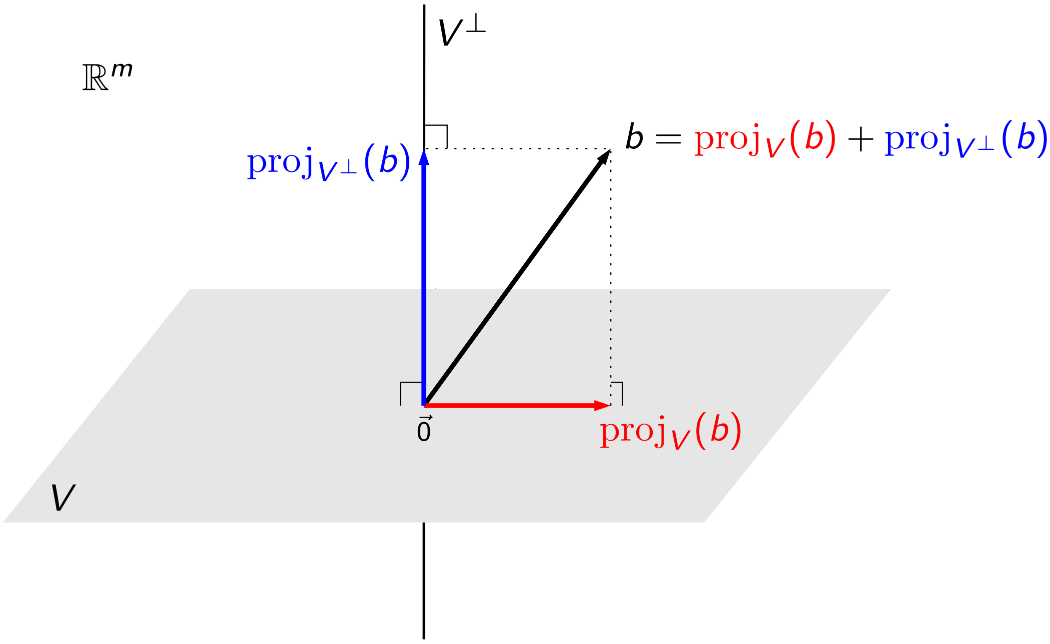
$b = \text{proj}_V(b) + \text{proj}_{V^\perp}(b)$



Uma aplicação da decomposição do slide 165

Se V for um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ de dimensão $m-1$, isto é, se $V^\perp$ tiver dimensão um, então $V^\perp = \langle w \rangle$ com $w \neq \vec{0}$, e pode-se aplicar a fórmula da projeção ortogonal sobre uma reta dada no slide 160 ao complemento ortogonal $V^\perp$ o que, juntamente com a decomposição do slide 165, permite obter a projeção ortogonal de um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ sobre V:

$$\boxed{\text{proj}_V(b) = b - \text{proj}_{V^\perp}(b) = b - \frac{w \cdot b}{w \cdot w} w.}$$

Exercício na aula

Considere $V = \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $b = (1, 1, 1)$.
Calcule $\text{proj}_V(b)$.

TPC: calcule $\text{proj}_V(b)$ onde $V = \langle (1,1,2), (-1,1,0) \rangle$ e $b = (-1, 1, 3)$ e compare o resultado obtido com o exercício do slide 157.

Resolução do exercício na aula do slide 166

Escrevendo $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = [\,1 \;\; 2 \;\; 3\,]$ conclui-se que dim $V = 2$ (nº de variáveis livres) e dim $V^\perp = \dim \mathbb{R}^3 - \dim V = 1$, obtendo-se pela fórmula do slide 155 (ver também o slide 154),

$$V^\perp = \mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \langle (1,2,3) \rangle.$$

Logo $V^\perp$ define uma reta com vetor diretor $(1,2,3)$ e tem-se pelo resultado do slide 166,

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_V(b) &= b - \mathrm{proj}_{V^\perp}(b) \\
&= (1,1,1) - \mathrm{proj}_{\langle(1,2,3)\rangle}((1,1,1)) \\
&= (1,1,1) - \frac{(1,2,3)\cdot(1,1,1)}{(1,2,3)\cdot(1,2,3)}(1,2,3) \\
&= (1,1,1) - \frac{6}{14}(1,2,3) = \frac{1}{7}(4,1,-2).
\end{aligned}$$

Distância de um vetor a um subespaço vetorial

Definição de distância de um vetor a um subespaço vetorial

Dados $b \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ define-se distância de b a V, que se denota-se por $d(b,V)$, como sendo a distância entre b e o vetor p de V que se encontra mais próximo de b([12]), isto é,

$$d(b,V) = d(b,p) = \min_{v \in V} d(b,v).$$

Intuitivamente o vetor de V mais próximo de b é o vetor de V que se encontra na reta que passa em b e tem direção perpendicular a V. Mais precisamente, tem-se o resultado do próximo slide.

[12] que se pode mostrar que existe sempre e é único!

Vetor mais próximo de um subespaço vetorial e projeção ortogonal

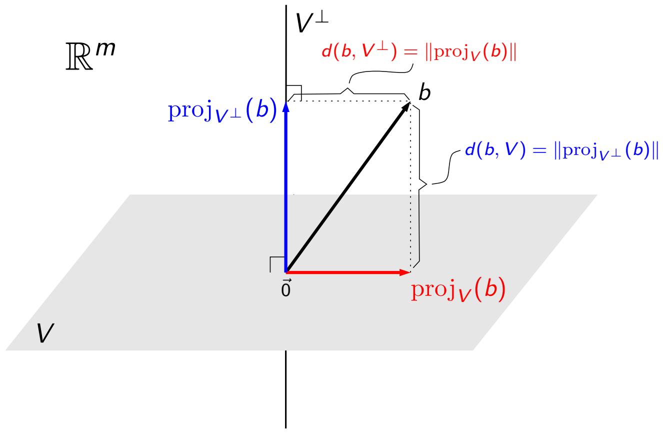
Teorema

Sejam $b \in \mathbb{R}^m$ e V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$. O vetor de V que se encontra mais próximo de b é $p = \mathrm{proj}_V(b)$ e tem-se,

$$\boxed{d(b, V) = d(b, \mathrm{proj}_V(b)) = \|b - \mathrm{proj}_V(b)\| = \|\mathrm{proj}_{V^\perp}(b)\|.}$$

Pelo teorema anterior aplicado a $V^\perp$, obtém-se ainda a relação,

- $\boxed{d(b, V^\perp) = d(b, \mathrm{proj}_{V^\perp}(b)) = \|b - \mathrm{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|\mathrm{proj}_V(b)\|}.$

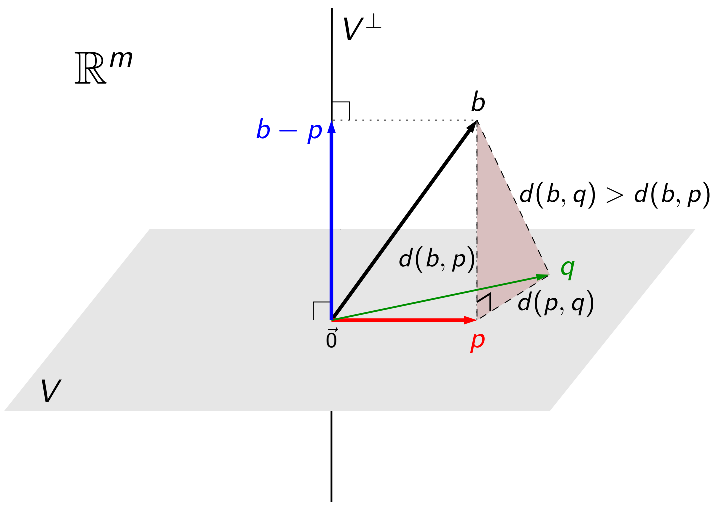


Demonstração do teorema do slide 169

Podemos supor que $b \notin V$. Sejam $p = \mathrm{proj}_V(b)$ e $q \in V$, $q \neq p$. Tem-se que $d(b, q)$ corresponde ao comprimento da hipotenusa do triângulo rectângulo assinalado na figura, triângulo esse com catetos de comprimentos $d(b, p) > 0$ e $d(q, p) > 0$. Pelo análogo do teorema de Pitágoras para vetores de $\mathbb{R}^m$ tem-se,

$$d(b, q)^2 = d(b, p)^2 + d(q, p)^2 > d(b, p)^2.$$

Logo $d(b, q) > d(b, p)$, para todo o $q \in V$, $q \neq p$. □



Equações normais

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e $A = [\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ matriz da base. Seja $b \in \mathbb{R}^m$ e $p = \text{proj}_V(b)$. Por definição tem-se:

(i) $p \in \mathcal{C}(A)$. Logo $Ax = p$ é possível e podemos escrever $p = A\bar{x}$ com $\bar{x}$ solução do sistema $Ax = p$.

(ii) $(b - p) \in \mathcal{C}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$. Logo, $A^T(b - p) = \vec{0}$.

Por (i) e (ii) tem-se,

$$\begin{aligned} A^T(b-p) = \vec{0} \quad &\Leftrightarrow \quad A^T(b - A\bar{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow A^T b = A^T A \bar{x} \\ &\Leftrightarrow \quad A^T A \bar{x} = A^T b. \end{aligned}$$

Logo $\bar{x}$ é também solução do sistema,

$$\boxed{A^T A x = A^T b,}$$

que se designa por sistema das equações normais. Uma vez que A é a matriz de uma base com n vetores, $\text{car}(A) = n$, e pode-se mostrar que a matriz $A^T A$ é invertível (de ordem n). Das considerações anteriores conclui-se que

$$\text{proj}_V(b) = p = A\bar{x}$$

com $\bar{x}$ solução única do sistema de equações normais ($\bar{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$), donde se deduz método das equações normais do próximo slide.

Caso geral: método das equações normais

Algoritmo

`Input:` V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
`Objectivo:` Calcular $\text{proj}_V(b)$.

1. Determinar uma <u>base</u> para V, $\{v_1, \ldots, v_n\}$.
2. Determinar a solução (única) $\bar{x}$ do sistema das equações normais,

$$A^T A x = A^T b,$$

   onde $A = [\, v_1 \ \cdots v_n \,]$ é a matriz da base de V.
3. $\text{proj}_V(b) = A\,\bar{x}$.

Exercício na aula

Determine a projeção ortogonal de $b = (1, 0, 4)$ sobre subespaço $V = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 2) \rangle$ utilizando o método das equações normais. Indique ainda as distâncias de b a V e a $V^\perp$.

Exercício na aula (resolução)

Aplicando o algoritmo do slide anterior tem-se:

1. $\{v_1, v_2\} = \{(1,0,1),(1,1,2)\}$ é base de $V = \langle v_1, v_2 \rangle$ (justifique).
2. Seja $A = [\, v_1 \;\; v_2 \,]$ a matriz da base. Tem-se:
   - $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.
   - $A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

   Reduzindo o sistema das equações normais $A^T A x = A^T b$ obtém-se

   $$[\, A^T A \mid A^T b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

   cuja a única solução é $\bar{x} = (1,1)$.
3. $\mathrm{proj}_V(b) = A\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

$d(b, V) = \|\mathrm{proj}_{V^\perp}(b)\| = \|b - \mathrm{proj}_V(b)\| = \sqrt{3}, \quad d(b, V^\perp) = \|\mathrm{proj}_V(b)\| = \sqrt{14}.$

Solução no sentido dos mínimos quadrados de $Ax = b$

- A solução $\bar{x}$ do sistema das equações normais $A^T Ax = A^T b$ verifica $\mathrm{proj}_V(b) = A\bar{x}$ com $V = \mathcal{C}(A)$ e portanto é solução de $Ax = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}(A)}(b)$.
- Quando $b \notin \mathcal{C}(A)$ o sistema $Ax = b$ é impossível e $\bar{x}$ é o vetor que melhor se aproxima de ser uma solução de $Ax = b$ no sentido em que é o vetor que minimiza a diferença (erro) $E = \|Ax - b\|$, e designa-se por solução de $Ax = b$ no sentido dos mínimos quadrados.
- Quando $b \in \mathcal{C}(A)$, a solução $\bar{x}$ no sentido dos mínimos quadrados é também uma solução de $Ax = b$ no sentido usual, isto é, verifica, $A\bar{x} = b$.