Ideia: ampliar a solução admissível com as folgas...

A solução $x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000)$ do slide anterior verifica com igualdade as restrições funcionais (1) e (2) e possui ordenada nula, correspondendo portanto à interseção dos 3 planos (que definem facetas da região admissível $\mathcal{R}$ do problema),

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C & = & 15000 & (1) \\ x_A & = & 5000 & (2) \\ \quad\quad x_B & = & 0, & \end{cases}$$

o que sugere que x é um vértice (ponto extremo) de $\mathcal{R}$. Calculando os valores correspondentes das variáveis de folga (ver o slide 247),

$$\begin{aligned} f_1 &= 15000 - (x_A + x_B + x_C) = 0, \\ f_2 &= x_A - 5000 = 0, \\ f_3 &= 10x_A + 5x_B + 10x_C - 100000 = 50000, \\ f_4 &= x_A + x_B + x_C - 12000 = 3000. \end{aligned}$$

podemos traduzir o facto de $x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000)$ corresponder à interseção dos 3 planos referidos acima dizendo que o vetor x ampliado com as folgas,

$$\bar{x} = (x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3, f_4) = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000),$$

possui 3 componentes nulas $f_1 = f_2 = x_B = 0$, ficando as restantes componentes deste vetor univocamente determinadas pelas equações que definem a região admissível do problema na forma *standard*, dizendo-se então que a solução $\bar{x}$ é básica admissível...

Região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma *standard*

Para podemos formalizar as ideias do slide anterior necessitamos primeiro de fixar alguma notação.

Dado um problema de PL na forma *standard*, com k variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ e s variáveis de folga $f_1, \ldots, f_s$, vamos denotar por $\mathcal{F}$ a região admissível deste problema, que descreveremos matricialmente como

$$\mathcal{F} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{k+s} \ : \ A\,\bar{x} = b, \ \bar{x} \geq 0\}.$$

Aqui $\bar{x} \geq 0$ significa $x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s \geq 0$ e A é uma matriz do tipo $m \times n$, com m número de restrições funcionais do problema e $n = k + s$ o número de variáveis (contando com variáveis de folga). No que se segue iremos assumir ainda que $\operatorname{car}(A) = m$ (o que é verificado para todos os exercícios da sebenta).

- Por exemplo, no caso do Problema 2 na forma *standard* do slide 247,

$$\mathcal{F} = \left\{\bar{x} = (x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3, f_4) \ : \ A\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0\right\},$$

  com,

$$[\,A \,|\, b\,] = \left[\begin{array}{rrrrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5000 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12000 \end{array}\right].$$

Vértice de $\mathcal{R} \leftrightarrow$ s.b.a. de $\mathcal{F}$

Tem-se então o seguinte resultado que permite reconhecer se um dado vetor é vértice da região admissível de um problema de PL.

Teorema

Nas condições do slide anterior tem-se que um vetor $x = (x_1, \ldots, x_k)$ é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se o vetor $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s)$, que é obtido acrescentando os valores das variáveis de folga, verifica as 4 condições:

1. Todas as componentes de $\bar{x}$ são **não negativas**.
2. O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é **superior ou igual** a $n - m$, onde $n = k + s$ é o número de variáveis (contando com variáveis de folga) e m o número de restrições funcionais do problema.
3. $\bar{x}$ verifica as restrições funcionais na forma standard, isto é, $A\bar{x} = b$.
4. As colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x}$ formam um conjunto **linearmente independente** de vetores.

Nas condições acima, diz-se então que $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s)$ é uma solução básica admissível (s.b.a.) de $\mathcal{F}$.

Exemplo

Vamos confirmar que o vetor $x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000)$ do Problema 2, que consiste em produzir 5000 toneladas de fertilizante A, nenhuma de fertilizante B e 10000 de fertilizante C, é vértice da região admissível $\mathcal{R}$ do Problema 2. Pelo teorema do slide anterior é equivalente a mostrar que o vetor

$$\bar{x} = (x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3, f_4) = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000),$$

define uma s.b.a. da região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma *standard*. Para isso temos que mostrar que $\bar{x}$ verifica as 4 condições enumeradas a seguir, onde $[\,A\,|\,b\,]$ é a matriz que define as restrições funcionais do problema na forma *standard* (ver o slide 250):

1. Todas as componentes de $\bar{x}$ são não negativas, o que se verifica. ✓
2. O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é superior ou igual ao número de variáveis (contando com variáveis de folga) menos o número de restrições funcionais: $3 \geq 7 - 4$. ✓

Exemplo (cont.)

3. $\bar{x}$ verifica as restrições funcionais do problema na forma standard, isto é, verifica $A\,\bar{x} = b$. De facto,

$$A\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 \\ 0 \\ 10000 \\ 0 \\ 0 \\ 50000 \\ 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000 \\ 5000 \\ 100000 \\ 12000 \end{bmatrix} = b. \checkmark$$

4. O conjunto das colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x} = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000)$, assinaladas a vermelho a seguir,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é **linearmente independente**.

Exemplo (concl.)

De facto, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz formada por esse conjunto de colunas obtém-se,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B'.$$

Como todas as colunas da matriz em escada B' têm pivot, o conjunto formado pelas 1ª, 3ª, 6ª e 7ª colunas de A é linearmente independente, como queríamos verificar. ✓

(Pode-se mostrar, alternativamente, que $\det B \neq 0$ o que fica como exercício para os alunos. . .)

Uma vez que as 4 condições são verificadas concluímos que $\bar{x}$ é uma s.b.a. de $\mathcal{F}$, o que é equivalente a dizer que x é um vértice de $\mathcal{R}$, como queríamos mostrar.

UFF !!