Região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma *standard*

Dado um problema de PL na forma *standard*, com k variáveis de decisão $x_1, \ldots, x_k$ e s variáveis de folga $f_1, \ldots, f_s$, vamos denotar por $\mathcal{F}$ a região admissível deste problema, que podemos descrever matricialmente como

$$\mathcal{F} = \left\{ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{R}^{k+s} \; : \; A\,\bar{x} = b, \;\; \bar{x} \geq 0 \right\}.$$

Aqui $\bar{x} \geq 0$ significa $x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s \geq 0$ e A é uma matriz do tipo $m \times n$, com m número de restrições funcionais do problema e $n = k + s$ o número de variáveis (contando com variáveis de folga).([14])

- Por exemplo, no caso do Problema 2 na forma *standard* do slide 247,

$$\mathcal{F} = \left\{ \bar{x} = (x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3, f_4) \; : \; A\bar{x} = b, \quad \bar{x} \geq 0 \right\},$$

com,

$$[\,A\,|\,b\,] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_A & x_B & x_C & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5000 \\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100000 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12000 \end{array}\right] \end{array}.$$

[14] Iremos sempre assumir que a car(A) é igual ao número de restrições funcionais m, o que é verificado para todos os exercícios da sebenta.

Vértice de $\mathcal{R} \leftrightarrow$ s.b.a. de $\mathcal{F}$

Tem-se o seguinte resultado que permite reconhecer se um dado vetor é vértice da região admissível de um problema de PL.

Teorema

Com as notações do slide anterior tem-se que um vetor $x = (x_1, \ldots, x_k)$ é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se o vetor $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s)$ que é obtido acrescentando os valores das variáveis de folga, verificar as 4 condições:

1. Todas as componentes de $\bar{x}$ são **não negativas**.
2. O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é **superior ou igual** a $n - m$, onde $n = k + s$ é o número de variáveis (contando com variáveis de folga) e m o número de restrições funcionais do problema.
3. $\bar{x}$ verifica as restrições funcionais na forma standard, isto é, $A\,\bar{x} = b$.
4. As colunas de A associadas às componentes não nulas de $\bar{x}$ formam um conjunto **linearmente independente** de vetores.

Nas condições acima, diz-se que $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k, f_1, \ldots, f_s)$ é uma solução básica admissível (s.b.a.) de $\mathcal{F}$ (associada ao vértice x).

Exemplo

Vejamos então que a solução $x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000)$ do Problema 2, que consiste em produzir 5000 toneladas de fertilizante A, nenhuma de fertilizante B e 10000 de fertilizante C, é um vértice da região admissível $\mathcal{R}$ usando o teorema anterior.

Calculando os valores das variáveis de folga (ver o slide 249) obtém-se,

$$\begin{aligned}
f_1 &= 15000 - (x_A + x_B + x_C) = 15000 - 15000 = 0,\\
f_2 &= x_A - 5000 = 5000 - 5000 = 0,\\
f_3 &= 10x_A + 5x_B + 10x_C - 100000 = 150000 - 100000 = 50000,\\
f_4 &= x_A + x_B + x_C - 12000 = 15000 - 12000 = 3000.
\end{aligned}$$

Tem-se então que $x = (x_A, x_B, x_C) = (5000, 0, 10000)$ é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se a solução ampliada com as respetivas folgas,

$$\bar{x} = (x_A, x_B, x_C, f_1, f_2, f_3, f_4) = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000),$$

é uma s.b.a. da região admissível $\mathcal{F}$ do problema na forma *standard*, ou seja, verifica as 4 condições do slide seguinte:

Exemplo (cont.)

1. Todas as componentes de $\bar{x}$ são não negativas, o que se verifica. ✓
2. O número de componentes nulas de $\bar{x}$ é superior ou igual ao número de variáveis (contando com variáveis de folga) menos o número de restrições funcionais: $3 \geq 7 - 4$. ✓
3. $\bar{x}$ verifica as restrições funcionais do problema na forma standard, isto é, verifica $A\,\bar{x} = b$, onde $[\,A\,|\,b\,]$ é a matriz que define a região admissível $\mathcal{F}$ do slide 249. De facto,

$$A\,\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000\\ 0\\ 10000\\ 0\\ 0\\ 50000\\ 3000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15000\\ 5000\\ 100000\\ 12000 \end{bmatrix} = b. \quad ✓$$

4. O conjunto das colunas de A (assinaladas a vermelho) associadas às componentes não nulas de $\bar{x} = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 10 & 5 & 10 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

é linearmente independente.

Exemplo (concl.)

De facto, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz formada por esse conjunto de colunas obtém-se,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B'.$$

Como todas as colunas da matriz em escada B' têm pivot, o conjunto formado pelas 1ª, 3ª, 6ª e 7ª colunas de A é linearmente independente.✓

(Pode-se provar que o conjunto formado pelas 4 colunas é linearmente independente mostrando alternativamente que $\det B \neq 0$, o que fica como exercício para os alunos.)

Uma vez que as 4 condições são verificadas concluímos que $\bar{x}$ é uma s.b.a. de $\mathcal{F}$, o que significa que x é um vértice de $\mathcal{R}$, como queríamos mostrar.

UFF !!