Exemplo (concl.)

De facto, aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz formada por esse conjunto de colunas obtém-se,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = B'.$$

Como todas as colunas da matriz em escada B' têm pivot, o conjunto formado pelas 1ª, 3ª, 6ª e 7ª colunas de A é linearmente independente.✓

(Pode-se provar que o conjunto formado pelas 4 colunas é linearmente independente mostrando alternativamente que $\det B \neq 0$, o que fica como exercício para os alunos.)

Uma vez que as 4 condições são verificadas concluímos que $\bar{x}$ é uma s.b.a. de $\mathcal{F}$, o que significa que x é um vértice de $\mathcal{R}$, como queríamos mostrar.

UFF !!

Definição alternativa de solução básica admissível

Definição de solução básica admissível

Consideremos um sistema linear $A\bar{x} = b$ com $A_{m\times n}$ tal que $\mathrm{car}(A) = m < n$, e seja B um subconjunto linearmente independente de m colunas de A. Vamos designar as variáveis associadas às colunas de B, x_β, $\beta \in B$, por variáveis básicas e as restantes $n - m$ variáveis por variáveis não básicas ou livres.([15])

- Chama-se solução básica associada a B denotada por x_B, à solução de $A\bar{x} = b$ que é obtida resolvendo o sistema $[B|b]$ em ordem às m variáveis básicas x_β, $\beta \in B$ (sistema PD), e acrescentando as restantes $n - m$ variáveis não básicas com o valor zero.
- Se todas as componentes da solução básica x_B forem não negativas, x_B diz-se uma solução básica admissível e denota-se por s.b.a.
  Caso contrário x_B diz-se não admissível e denota-se por s.b.n.a.

Observação

Como existem $\binom{n}{m}$ formas distintas de escolher m colunas de um conjunto de n, o número de soluções básicas de $A\bar{x} = b$ não pode ultrapassar $\binom{n}{m}$.

[15] Por abuso de linguagem, estamos ainda a denotar por B o subconjunto dos índices das colunas de B.

“Toy example”

Exercício na aula

Determinar as soluções básicas admissíveis e não admissíveis do sistema $A\bar{x} = b$ com $[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right]$.

Resolução: A matriz A tem $n = 3$ colunas e $m = 2$ linhas, tendo-se $\mathrm{car}(A) = m = 2$ e portanto existem $\binom{3}{2} = 3$ maneiras distintas de escolher 2 colunas em 3:

- Considerando B o conjunto linearmente independente formado pela 1ª e 2ª colunas de A, tem-se $[B|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$.
  Logo $x_1 = x_2 = 2$. Fazendo $x_3 = 0$ obtém-se a s.b.a. $x_{1,2} = (2, 2, 0)$.
- Considerando B o conjunto linearmente independente formado pela 1ª e 3ª colunas de A, tem-se $[B|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$.
  Logo $x_1 = 3$ e $x_3 = 1$. Fazendo $x_2 = 0$ obtém-se a s.b.a. $x_{1,3} = (3, 0, 1)$.
- Considerando B o conjunto linearmente independente formado pela 2ª e 3ª colunas de A, tem-se $[B|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & -2 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$.
  Logo $x_2 = 6$ e $x_3 = -2$. Fazendo $x_1 = 0$ obtém-se a s.b.n.a. $x_{2,3} = (0, 6, -2)$ (uma vez que possui uma componente negativa).

Problema 1 revisitado

Aplicando as mesmas ideias do slide anterior ao sistema $A\bar{x} = b$ com

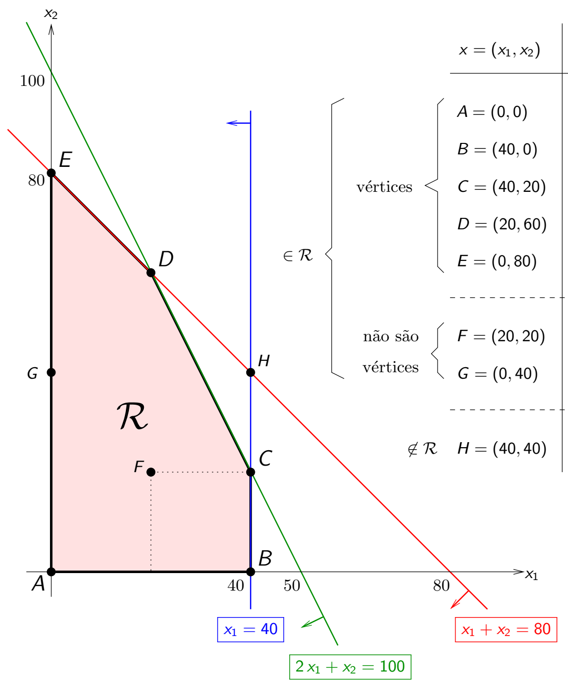
$$[\,A \mid b\,] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 80 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{array}\right],$$

que define a região admissível do Problema 1 na forma standard,

$$\begin{array}{ll} \max & z = 300\,x_1 + 200\,x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 + f_1 = 80 \\ & 2x_1 + x_2 + f_2 = 100 \\ & x_1 + f_3 = 40 \\ & x_1,\ x_2,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \geq 0 \end{array}$$

obtém-se a tabela do slide seguinte, que permite identificar todos os vértices da região admissível $\mathcal{R}$ e as relações de adjacência entre esses vértices: dois vértices são adjacentes se e só são definidos a partir de conjuntos de variáveis básicas que apenas diferem numa variável básica.

Problema 1 revisitado



$x = (x_1, x_2)$	$\bar{x} = (x_1, x_2, f_1, f_2, f_3)$	
$A = (0, 0)$	$\bar{A} = (0, 0, 80, 100, 40)$	
$B = (40, 0)$	$\bar{B} = (40, 0, 40, 20, 0)$	
$C = (40, 20)$	$\bar{C} = (40, 20, 20, 0, 0)$	
$D = (20, 60)$	$\bar{D} = (20, 60, 0, 0, 20)$	
$E = (0, 80)$	$\bar{E} = (0, 80, 0, 20, 40)$	
$F = (20, 20)$	$\bar{F} = (20, 20, 40, 40, 20)$	
$G = (0, 40)$	$\bar{G} = (0, 40, 40, 60, 40)$	
$\notin \mathcal{R}$ $H = (40, 40)$	$\bar{H} = (40, 40, 0, -20, 0)$	s.b.n.a $\notin \mathcal{F}$ (tem uma componente negativa)

A, B, C, D, E: vértices $\rightarrow$ s.b.a.; F, G: não são vértices $\rightarrow$ não são s.b.a.; $A, \dots, G \in \mathcal{R}$, $\bar{A}, \dots, \bar{G} \in \mathcal{F}$

Variáveis de folga:

$f_1 = 80 - (x_1 + x_2)$

$f_2 = 100 - (2\,x_1 + x_2)$

$f_3 = 40 - x_2$

Var. básicas	**1,2,3**	**1,2,4**	**1,2,5**	**1,3,4**	**1,3,5**	**1,4,5**	**2,3,4**	**2,3,5**	**2,4,5**	**3,4,5**
s.b.a de $\mathcal{F}$	$\bar{C}$		$\bar{D}$	$\bar{B}$			-		$\bar{E}$	$\bar{A}$
vértice de $\mathcal{R}$	C		D	B			-		E	A
s.b.n.a.		$\bar{H}$			TPC	(80,0,0,-60,-40)	-	TPC		
"pseudo vértice"		H			TPC	(80,0)	-	TPC		

Problema 2 revisitado

- Vimos no slide 251 que $x = (5000, 0, 10000)$ era um vértice da região admissível $\mathcal{R}$ associado à s.b.a. $\bar{x} = (5000, 0, 10000, 0, 0, 50000, 3000)$.
- A solução x está associada ao conjunto de variáveis básicas $1, 3, 6, 7$ (uma vez que as restantes 3 variáveis têm valor zero) e denota-se $x_{1,3,6,7}$.

Vejamos se trocando no conjunto B a coluna 3 pela coluna 2 ainda se obtém um vértice de $\mathcal{R}$. Ora tem-se,

$$[B|b] = \left[\begin{array}{rrrr|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 15000 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 10 & 5 & -1 & 0 & 100000 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 12000 \end{array}\right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5000 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10000 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3000 \end{array}\right].$$

Daqui resulta que $x_{1,2,6,7} = (5000, 10000, 0)$ é vértice de $\mathcal{R}$ associado à s.b.a. degenerada ([16]) $\bar{x} = (5000, 10000, 0, 0, 0, 0, 3000)$.

O vértice $x_{1,2,6,7}$ é adjacente ao vértice $x_{1,3,6,7}$ uma vez que os respectivos conjuntos de variáveis básicas apenas diferem numa variável básica, tendo-se ainda que melhora (isto é, baixa) o valor da f.o. $z = 50x_A + 40x_B + 60x_C$.

[16] porque o número de componentes nulas é estritamente superior ao número de variáveis menos o número de restrições.

"O método do simplex foi desenvolvido em 1949 pelo matemático americano George B. Dantzig para resolver problemas de PL. A ideia central do método consiste em mover-se de uma s.b.a. para s.b.a. adjacente enquanto o valor da f.o. for melhorando, até se atingir uma solução ótima, em que as soluções adjacentes já não melhoram esse valor da f.o. [...]"

(Retirado da página 159 do Texto de Apoio)

BOM $\mathcal{N}(A^T AL)$!

com $A_{25\times 12}$ e $L_{12\times 2024}$