INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

2º teste de Álgebra Linear

6 de janeiro de 2025 - Duração: 1h30

Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)	1c)	1d)	2a)	2b)	2c)	2d)	3)	4a)	4b)	Total
1	2.5	2	2	1.75	1	2.5	1.75	2	0.75	2.75	20

[7.5v] 1. Sejam $V = \langle (1,1,0,0), (-1,0,-1,1) \rangle$ e $b = (-1,3,0,3)$.

(a) Justifique que $(0,0,1,1) \perp V$.

(b) Determine uma base ortogonal de V.

Uma possível base ortogonal é $\{(1,1,0,0), (-1,1,-2,2)\}$.

(c) Calcule $\text{proj}_V(b)$.

$(0,2,-2,2)$.

(d) Indique um vetor $c \in \mathbb{R}^4$ tal que $c \notin V^\perp$ e a distância de c a V é 1.

Por exemplo, $(1,1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

[7v] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Indique os valores de α para os quais A é invertível e calcule $\det(3A^{-1})$ para esses valores.

A invertível $\Leftrightarrow \alpha \neq 1$, tendo-se $\det(3A^{-1}) = \frac{27}{1-\alpha}$, $\forall \alpha \neq 1$.

(b) Considere $\alpha = 3$. Justifique que $(1,1,1)$ é vetor próprio de A e indique o valor próprio correspondente.

$Av = \lambda v$ com $v = (1,1,1)$ e $\lambda = 2$ (valor próprio).

No que se segue considere $\alpha = 1$.

(c) Calcule os valores próprios de A e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

A possui valores próprios 0 e 1 com m.a.$(0) = 1$ e m.a.$(1) = 2$.

(d) Averigue se A é diagonalizável.

Não (m.a.(1) $\neq$ m.g.(1)).

[2v] 3. Uma empresa fabrica dois produtos I e II, utilizando as matérias-primas A e B.

A tabela seguinte apresenta as quantidades (em kg) de A e B que são necessárias para produzir 1 kg de cada produto e os preços de venda (em €/kg) desses produtos:

Produto	A (kg)	B (kg)	Receita (€/kg)
I	10	15	70
II	5	20	50

As disponibilidades das matérias-primas A e B são, respetivamente, 80 e 100 kg. Ambas as matérias-primas são adquiridas a 0.3 €/kg.

A empresa pretende determinar as quantidades a fabricar dos produtos I e II de modo a maximizar o lucro (receita - despesa), com a condição da quantidade produzida de I não ser inferior a 40% da quantidade produzida de II.

Formule o problema em termos de programação linear, atribuíndo significado às variáveis.

Considerando variáveis x_1 e x_2, que representam as quantidades (em kg) a fabricar dos produtos I e II , respectivamente, o problema pode ser formulado como:

$$\begin{array}{lrl} \max & 70\,x_1 + 50\,x_2 & -\ \ 0.3 \times 25\,(x_1+x_2) \\ \text{s.a} & 10\,x_1 + \ \ 5\,x_2 & \leq 80 \\ & 15\,x_1 + 20\,x_2 & \leq 100 \\ & x_1 - 0.4x_2 & \geq 0 \\ & x_1, \qquad x_2 & \geq 0. \end{array}$$

[3.5v] 4. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{llcccl} \max & z = & x_1 + x_2 & + x_3 & & \\ \text{s. a} & & x_1 - x_2 & & \geq & 2 \\ & & x_2 & + x_3 & \leq & 6 \\ & & x_1 & - x_3 & \leq & 0 \\ & & x_1, \quad x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{array}{llcccccccl} \max & z = x_1 + x_2 & + & x_3 & & & & & & \\ \text{s. a} & x_1 - x_2 & & & - f_1 & & & = & 2 \\ & \quad x_2 & + & x_3 & & + f_2 & & = & 6 \\ & x_1 & - & x_3 & & & + f_3 & = & 0 \\ & x_1, \quad x_2, & & x_3, & f_1, & f_2, & f_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Justifique que $(2, 0, 2)$ é uma solução admissível e averigue se essa solução corresponde a um vértice da região admissível do problema.

É vértice (mostrar que o vetor ampliado com as respetivas folgas é uma s.b.a.).