**INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA**

1ª Chamada do Exame de Álgebra Linear

6 de janeiro de 2025 - Duração: 2h30

| |
|---|
| Guarde todos os equipamentos eletrónicos, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente. O incumprimento das regras leva à **anulação da prova**. |

**Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.**

Número: Nome:

Cotação (não preencher)

| **1a)** | **1b)** | **1c)i** | **1c)ii** | **1c)iii** | **2a)** | **2b)** | **2c)** | **3)** | **4a)** | **4b)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.5 | 0.5 | 0.75 | 0.75 | 1 | 0.5 | 1 | 1.5 | 0.5 | 0.75 | 1.25 |

| **5a)** | **5b)** | **5c)** | **6a)** | **6b)** | **6c)** | **7)** | **8a)** | **8b)** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 1.75 | 1.5 | 1 | 1.5 | 1 | 1.25 | 0.5 | 1 | 20 |

[4.5$v$] 1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 2-\alpha & \alpha \end{bmatrix} = [\, v_1\, v_2\, v_3 \,]$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\alpha \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de $\alpha$.

Para $\alpha \neq 0, 1$ é PD.
Para $\alpha = 0$ é PI.
Para $\alpha = 1$ é IMP.

(b) Considere $\alpha = 2$ e mostre que $(-3, 2, 3)$ é solução de $Ax = b$.

Mostre que $Av = b$ com $v = (-3, 2, 3)$.

(c) Considere $\alpha = 1$.

i. Determine uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.
Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é $\{v_1, v_2\}$ e a sua dimensão é 2.

ii. Descreva $\mathcal{C}(A)$ geometricamente.
É um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetores diretores $v_1$ e $v_2$.
(ou em alternativa, com vetor normal $(0, -1, 1)$).

iii. Escreva $v_3$ como combinação linear de $v_1$ e $v_2$.
$v_3 = 2v_1 - v_2$

[$3v$] 2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $u = (-1, 0, 1, 1)$.

(a) Justifique que $u \in \mathcal{N}(A)$.

(b) Determine a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.

2.

(c) Indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que contenha $u$.

Uma possível base é $\{u, v\}$ con $v = (-2, -1, 1, 0)$.

[$0.5v$] 3. Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (2x - y + z, x - 3z)$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

[$2v$] 4. Considere $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{u, v, w\}$ é linearmente independente e $A = [u\ v\ w]$.

(a) Justifique que $n \geq 3$.

(b) Mostre que para todo o $x, y \in \mathbb{R}^3$ tais que $Ax = Ay$ se tem $x = y$.

[$3.75v$] 5. Sejam $V = \langle (1, 1, 0, 0), (-1, 0, -1, 1) \rangle$ e $b = (-1, 3, 0, 3)$.

(a) Justifique que $(0, 0, 1, 1) \perp V$.

(b) Determine uma base ortogonal de $V$.

Uma possível base ortogonal é $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 1, -2, 2)\}$.

(c) Calcule $\text{proj}_V(b)$ e indique distância de $b$ a $V$.

$(0, 2, -2, 2)$ e $\text{dist}(b, V) = \|b - \text{proj}_V(b)\| = \sqrt{7}$.

[$3.5v$] 6. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Indique os valores de $\alpha$ para os quais $A$ é invertível e calcule $\det(3A^{-1})$ para esses valores.

$A$ invertível $\Leftrightarrow \alpha \neq 1$, tendo-se $\det(3A^{-1}) = \frac{27}{1-\alpha}$, $\forall \alpha \neq 1$.

No que se segue considere $\alpha = 1$.

(b) Calcule os valores próprios de $A$ e indique as respetivas multiplicidades algébricas.

$A$ possui valores próprios 0 e 1 com $\text{m.a.}(0) = 1$ e $\text{m.a.}(1) = 2$.

(c) Averigue se $A$ é diagonalizável.

Não ($\text{m.a.}(1) \neq \text{m.g.}(1)$).

[1.25$v$] 7. Uma empresa fabrica dois produtos I e II, utilizando as matérias-primas A e B.

A tabela seguinte apresenta as quantidades (em kg) de A e B que são necessárias para produzir 1 kg de cada produto e os preços de venda (em €/kg) desses produtos:

| Produto | A (kg) | B (kg) | Receita (€/kg) |
|---|---|---|---|
| I | 10 | 15 | 70 |
| II | 5 | 20 | 50 |

As disponibilidades das matérias-primas $A$ e $B$ são, respetivamente, 80 e 100 kg. Ambas as matérias-primas são adquiridas a 0.3 €/kg.

A empresa pretende determinar as quantidades a fabricar dos produtos I e II de modo a maximizar o lucro (receita - despesa), com a condição da quantidade produzida de I não ser inferior a 40% da quantidade produzida de II.

Formule o problema em termos de programação linear, atribuíndo significado às variáveis.

Considerando variáveis $x_1$ e $x_2$, que representam as quantidades (em kg) a fabricar dos produtos I e II , respectivamente, o problema pode ser formulado como:

$$\begin{array}{ll} \max & 70\,x_1 + 50\,x_2 \;-\; 0.3 \times 25\,(x_1 + x_2) \\ \text{s.a} & 10\,x_1 + \;\;5\,x_2 \;\leq 80 \\ & 15\,x_1 + 20\,x_2 \;\leq 100 \\ & \;\;x_1 - 0.4x_2 \;\geq 0 \\ & \;\;x_1, \qquad x_2 \;\geq 0. \end{array}$$

[1.5$v$] 8. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = x_1 + x_2 + x_3 & & \\ \text{s. a} & x_1 - x_2 & \geq & 2 \\ & x_2 + x_3 & \leq & 6 \\ & x_1 - x_3 & \leq & 0 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Escreva o problema na forma *standard*.

$$\begin{array}{lrcl} \max & z = x_1 + x_2 + x_3 & & \\ \text{s. a} & x_1 - x_2 - f_1 & = & 2 \\ & x_2 + x_3 + f_2 & = & 6 \\ & x_1 - x_3 + f_3 & = & 0 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad f_1, \quad f_2, \quad f_3 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Justifique que $(3, 1, 3)$ é uma solução admissível e averigue se essa solução corresponde a um vértice da região admissível do problema.

Não é vértice (mostrar que o vetor ampliado com as respetivas folgas não é s.b.a.).