Capítulo 1

Cálculo matricial e sistemas de equações lineares

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Exercícios 1.

1. Considere as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } D=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Simplifique e calcule, sempre que possível, as seguintes expressões.

   a) $(5A-A)-(B-2B)$ b) $(2A-B)^\top - C$ c) $(2(A^\top - C)^\top + B)^\top$
   d) $(B^\top - C)^\top + 2B^\top$ e) $D+D^\top$ f) $D-D^\top$.

   a) $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 1 \\ 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 18 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$, **c)** $\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 0 & 13 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, **d)** Não definido, **e)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$, **f)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Identifique, se existirem, escalares α e β tais que

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

   $\alpha=-3,\ \beta=\frac{1}{2}$

3. Determine matrizes X e Y tais que $3X-2Y=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e $-X+Y=2I$.

$X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Exercício 2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

e os vetores

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v = \begin{bmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{bmatrix}.$$

Calcule, sempre que possível, AB, BA, $BA^\top$, C^2, DC, CD, B^3, BI e IB com I matriz identidade de ordem conveniente, $u^\top u$, $u\,u^\top$, Bu, Bv, $B[\,u \;\; v\,]$ e $B(u+v)$.

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 \\ -11 & -2 & 9 \end{bmatrix}, \quad BA \text{ não definida}, \quad BA^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad CC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B^3 = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -1 \\ 10 & 8 & -23 \\ 15 & 10 & 10 \end{bmatrix},$$

$$BI = IB = B, \quad u^T u = 14, \quad uu^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad Bu = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad Bv = \begin{bmatrix} 1020 \\ 2960 \\ -190 \end{bmatrix},$$

$$B[\,u \;\; v\,] = \begin{bmatrix} 5 & 1020 \\ 5 & 2960 \\ -3 & -190 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B(u+v) = \begin{bmatrix} 1025 \\ 2965 \\ -193 \end{bmatrix}.$$

Sistemas de equações lineares e equações matriciais

Exercícios 3. Resolva cada um dos seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$

   $CS = \{(-1, 2, 1)\}$ (PD)

2. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$

$CS = \{(\frac{40}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{20}{3})\}$ (PD)

3. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{cases}$

   $CS = \emptyset$ (IMP)

4. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 1 - 5x_4, x_2 = 2 + 2x_4, x_3 = -1, x_4 \in \mathbb{R}\}$ (PI)

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_1 = 13 - 2x_2 + 8x_5, x_3 = -5 - 3x_5, x_4 = 4 + 2x_5, x_2, x_5 \in \mathbb{R}\}$ (PI)

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$.

   $CS = \{(1, -1, -2, 3)\}$ (PD)

Exercícios 4.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   Resolva a equação matricial $Ax = 3x + b$, com $x \in \mathbb{R}^3$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -3 \\ \alpha & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & -4 \end{bmatrix}$.

   Determine os valores de α para os quais $(-1, 0, 2, 1)$ é solução do sistema $Ax = \vec{0}$.

3. Seja $Ax = b$ um sistema que admite soluções não nulas u e v. Para que valores de b o vetor $u + v$ ainda é solução de $Ax = b$? Justifique.

a) $CS = \left\{\left(\frac{3}{10}, -\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)\right\}$ **b)** $\alpha = 2$ **c)** $b = \vec{0}$

Exercício 5. Quais das seguintes matrizes estão em escada/reduzidas?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não/Não, Não/Não, Sim/Sim, Sim/Não, Sim/Sim

Exercícios 6.

1. Seja E uma matriz em **escada** do tipo $m \times n$.

   a) Quantos *pivots* podem existir em E?

   b) Qual é a relação entre o número de *pivots* e o número de linhas nulas de E?

   a) Podem existir no máximo o menor dos 2 números m e n
   b) Número de pivots + número de linhas **nulas** de E = número de linhas de $E = m$

2. Seja S um sistema de equações lineares do tipo $m \times n$. Diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a) Se $m < n$, então S é indeterminado.

   b) Se S é possível e $m < n$, então é indeterminado com exatamente $n - m$ variáveis livres.

   c) Se $m > n$, então S é impossível.

   d) Se S é possível e $m > n$, então S é determinado.

   e) Se S é possível e $m \geq n$, então S é determinado.

   f) Se S é possível e determinado então $m = n$ e a matriz reduzida obtida por aplicação do método de Gauss à matriz dos coeficientes de S é a matriz identidade.

   São todas falsas!
   Para cada das alíneas falsas apresente um *contra-exemplo*, ou seja, um exemplo de um sistema S em que a afirmação não seja verificada

Interpretação geométrica de sistemas lineares

Exercícios 7.

1. Indique os valores de b para os quais o sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = & 4 \\ 4x_1 + 6x_2 & = & b \end{cases}$$

é impossível e interprete o resultado geometricamente.

$b \neq 8$. O sistema representa a interseção de duas retas no plano. Se $b \neq 8$ as retas são paralelas, não coincidentes. Se $b = 8$ as retas são coincidentes e o sistema é PI

2. Indique uma equação a juntar a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & = & 4 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 & = & 2 \end{cases}$$

de forma a obter um sistema impossível. Interprete geometricamente o resultado no contexto do esquema da página 28 do Texto de Apoio e indique uma solução alternativa para este exercício que corresponda geometricamente a um caso distinto.

Por exemplo, adicionando a equação $3x_1 + 2x_3 = 5$, obtém-se um sistema linear impossível (verifique) que corresponde ao 3º caso da 2ª linha do esquema da página 28, uma vez que os 3 planos são não paralelos 2 a 2. Uma solução alternativa seria, por exemplo, obtida adicionando a equação $4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, tendo-se nessa altura um sistema linear que corresponde ao 2º caso da 2ª linha.

3. Classifique e interprete geometricamente o sistema de equações lineares correspondente a cada uma das seguintes matrizes ampliadas.

a) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \\ 2 & -3 & 3 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$.

a) IMP - representa a interseção de 4 retas não concorrentes num ponto;
b) PD - representa 3 planos que se intersectam num único ponto (1º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio);
c) PI - representa 3 planos não paralelos nem coincidentes que são concorrentes numa reta (2º caso do esquema da página 28 do Texto de Apoio).

Verifique adicionalmente que o ponto de intersecção referido em b) tem coordenadas $(\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5})$ e que a reta de intersecção referida em c) passa na origem e tem vetor diretor $(-3, 4, 1)$.

Discussão de sistemas com parâmetros

Exercícios 8.

1. Discuta cada um dos seguintes sistemas lineares para todos os valores dos parâmetros.

a) $\begin{cases} x \quad - \quad z &= 1 \\ \quad y + \; az &= 0 \\ -x + y + 2az &= 1 \end{cases}, \; a \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x_1 + \; x_2 - \; x_3 &= 1 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 &= \gamma \\ x_1 + \gamma x_2 + \gamma x_3 &= 1 \end{cases}, \; \gamma \in \mathbb{R}.$

c) $\begin{cases} ax \quad + 2z &= 2 \\ x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{cases}, \; a, b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{cases} 2x \quad + 4y + bz &= 2 \\ x + (d+2)y &= 1 \\ x \quad + 2y + bz &= 1 \\ x \quad + 2y &= c \end{cases}, \; b, c, d \in \mathbb{R}.$

a) Se $a \neq 1$ é PD. Se $a = 1$ é IMP, **b)** PD $\forall \gamma$, **c)** Se $ab \neq 4$ é PD. Se $ab = 4$ com $a \neq 1$ é IMP. Se $a = 1$ e $b = 4$ é PI (com variável livre x_3), **d)** Se $c \neq 1$ é IMP $\forall b, d$. Se $c = 1$ e $b, d \neq 0$ é PD. Se $c = 1$ e $bd = 0$ é PI (com variáveis livres x_2 e x_3 se $b = d = 0$, com variável livre x_3 se $b = 0$ e $d \neq 0$ e com variável livre x_2 se $b \neq 0$ e $d = 0$)

2. Discuta os sistemas $Ax = b$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ \alpha & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ \beta - \alpha \end{bmatrix}$

(Exercício do 1º teste de 12 de novembro de 2022)

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 1 & \alpha+2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} \beta \\ 2\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Se $\alpha \neq -2, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = 1$ o sistema é PI $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = -2$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP.

b) Se $\alpha \neq -1, 1$ o sistema é PD $\forall \beta \in \mathbb{R}$.
Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ o sistema é PI. Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ o sistema é IMP.
Se $\alpha = 1$ e $\beta = 4$ o sistema é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 4$ o sistema é IMP.

Exercício 9. Considere os sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & b_1 \\ 0 & 1 & a & b_2 \\ -1 & 1 & 2a & b_3 \end{array}\right], \text{ com } a, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

a) Para que valores de a os sistemas são possíveis, independentemente dos valores dos parâmetros b_1, b_2, b_3?

b) Para que valores de b_1, b_2, b_3 os sistemas são possíveis, independentemente do valor do parâmetro a?

c) Atribua a a, b_1, b_2, b_3 valores que tornem o sistema

   c1) impossível,

   c2) indeterminado.

a) $a \neq 1$, **b)** Se $b_1 - b_2 + b_3 = 0$, **c1)** $a = 1$ e b_1, b_2, b_3 tal que $b_1 - b_2 + b_3 \neq 0$. Por exemplo, $b = (0, 0, 1)$, **c2)** Se $a = 1$ e $b_3 + b_1 - b_2 = 0$. Por exemplo, $b = (1, 2, 1)$

INVERTIBILIDADE

Exercício 10. Verifique que $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$.

Exercícios 11.

1. Determine, caso exista, a inversa de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$, singular, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & -8 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{4} & 2 \end{bmatrix}$.

2. Indique os valores do parâmetro λ para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ é invertível.

   $\lambda \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

3. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é não singular e utilize A^{-1} para resolver o sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Sejam A, B e C matrizes invertíveis da mesma ordem.

   a) É correto afirmar que $A+B$ é invertível?
   b) A matriz A^3BC^{-1} é invertível? Se sim, qual a sua inversa?
   c) Prove que se $AB = AC$ então $B = C$, ou seja, a lei do corte é válida substituindo $A \neq [0]$, por A invertível.

5. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = I - A$.

   (a) A matriz A será invertível? Se sim, qual a sua inversa?
   É invertível com inversa $A+I$
   (b) Prove que $A^3 - 2A + I = 0$.

6. Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3 invertível e $b, c \in \mathbb{R}^3$.

   a) Classifique os sistemas $Ax = b$ e $A^{-1}x = c$.
   b) Prove que os sistemas anteriores são equivalentes se e só se $b = A^2c$.
   c) Sejam u, v e w, respectivamente, as soluções dos sistemas lineares,

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a inversa de A em função dos vetores u, v e w.

a) ambos PD com solução $A^{-1}b$ e Ac, respetivamente, **c)** $A^{-1} = \left[\frac{1}{3}u \mid v \mid \frac{1}{2}w\right]$

7. Sejam A, B, C e X matrizes que satisfazem a equação matricial

$$\left[(AX)^T + BC\right]^{-1} = I,$$

em que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = [\,2 \ \ 3\,]$.

   (a) Qual o tipo da matriz X?

   (b) Determine X.

a) 2×2; **b)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Prove que as seguintes afirmações são equivalentes.

   i) A é invertível.

   ii) $Ax = 0$ é determinado.

   iii) $Ax = b$ é possível para todo o vetor b de $\mathbb{R}^n$.

Transformações Lineares

Exercícios 12.

1. Considere as transformações geométricas do plano,

$$T_A(x) = Ax, \qquad T_B(x) = Bx, \qquad T_C(x) = Cx, \qquad T_D(x) = Dx,$$

em que $x \in \mathbb{R}^2$ e

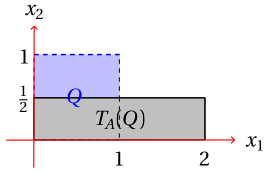
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   i) Descreva as transformações em coordenadas cartesianas.

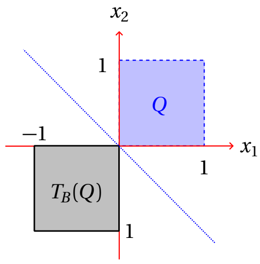
   $T_A(x_1, x_2) = (2\,x_1, \frac{1}{2}x_2)$,
   $T_B(x_1, x_2) = (-x_2, -x_1)$,
   $T_C(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2, x_1 + x_2)$,
   $T_D(x_1, x_2) = (0, x_2)$.

ii) Interprete geometricamente as transformações geométricas anteriores e represente as imagens do quadrado unitário $Q = [0,1]^2$ que se obtêm aplicando essas transformações.

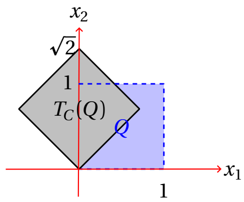
T_A efetua uma dilatação de razão 2 na direção do eixo dos $x\,x$ e uma contração de razão $\frac{1}{2}$ na direção do eixo dos $y\,y$:



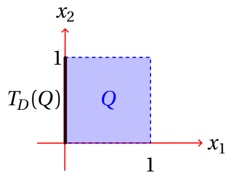
T_B efetua uma reflexão em relação à bissectriz dos quadrantes pares:



T_C efetua uma rotação de $\frac{\pi}{4}$ radianos em torno da origem no sentido anti-horário:



T_D efetua uma projeção ortogonal sobre o eixo dos $y\,y$.



2. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Represente a imagem do paralelogramo definido pelos vetores $(1,0)$ e $(1,1)$ que é obtida aplicando a transformação linear T_A e interprete geometricamente o resultado obtido.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Interprete o produto de matrizes AB usando uma transformação geométrica do plano.

   Corresponde à reflexão do triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ em relação ao eixo dos $y\,y$.

4. Defina as rotações no espaço de θ radianos em torno do primeiro e do segundo eixos coordenados (no sentido direto).

   $$R_{x,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & \sin\theta \end{bmatrix}.$$

5. Indique as matrizes canónicas das seguintes transformações lineares.

   (a) $T(x,y,z) = (2x+y, -y, x+y+z)$.

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (b) $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$.

   $A = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$.

   (c) $T(x_1,x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$.

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Considere uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (1,1,1)$ e $T(1,1) = (1,2,3)$. Determine $T(x,y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   $T(x,y) = (x, x+y, x+2y)$

7. Averigue quais das seguintes transformações lineares são invertíveis e indique a respetiva inversa, caso exista.

   (a) Rotação no plano em torno da origem no sentido anti-horário de θ radianos, R_θ.

   Sim, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

   (b) Projecção no espaço sobre o plano xOy.

   Não, porque a projeção é definida pela matriz não invertível, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$.

   Sim, $T^{-1}(x,y,z) = T_{A^{-1}}(x,y,z) = A^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$ $\frac{1}{2}(x-y+z, x+y-z, -x+y+z)$, onde A é a matriz da tranformação T.

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 13.

1. Calcule $A^2+3bb^\top$, com $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   $\begin{bmatrix} 12 & -6 & 7 \\ -14 & 7 & 6 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

2. Indique o conjunto de soluções dos sistemas lineares

   (a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 18 \\ x_3 - 2x_4 = 5 \end{cases}$

   a) $CS=\{(x,y,z): x=0, y=1-z, z\in\mathbb{R}\}$;
   b) $CS=\{(x_1,x_2,x_3,x_4): x_1=4+2x_2, x_3=3, x_4=-1, x_2\in\mathbb{R}\}$

3. Discuta os sistemas $Ax=b$ para $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, com

   (a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   (b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \beta \end{bmatrix}$.

   (c) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & \alpha \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$.

   (d) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ 1 \end{bmatrix}$.

(e) $A=\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Se $\alpha \neq 2$ é PD. Se $\alpha = 2$ é IMP **b)** Se $\beta \neq 1$ é IMP $\forall \alpha$. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -5$ é PD. Se $\beta = 1$ e $\alpha = -5$ é IMP. **c)** Se $\alpha \neq 14$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 14$ e $\beta \neq 6$ é IMP. Se $\alpha = 14$ e $\beta = 6$ é PI. **d)** Se $\alpha \neq 3$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 3$ e $\beta \neq 1$ é IMP. Se $\alpha = 3$ e $\beta = 1$ é PI. **e)** Se $\alpha \neq -1, 1$ é PD. Se $\alpha = -1$ é IMP. Se $\alpha = 1$ é PI.

4. Discuta o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1+3a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

   Se $b = 0$ ou $a = b$ é IMP. Se $b \neq 0$ e $a \neq b$ é PD.

5. Determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo a que o sistema

$$\begin{cases} x + ay + cz = 3 \\ bx + cy + -3z = -5 \\ ax + 2y + bz = 2 \end{cases}$$

   admita a solução $(2, -1, 2)$.

   $a = b = c = 1$

6. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Determine e interprete geometricamente o conjunto de soluções do sistema $Ax = 0$.

   $CS = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = -x_3, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que define uma reta que passa na origem com vetor diretor $(-1, 1, 1)$

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   a) Determine o conjunto dos vetores $b \in \mathbb{R}^4$ para os quais $Ax = b$ é possível.

   b) Qual é a característica de A?

   c) Dê exemplo de um vetor c para o qual o sistema $Ax = c$ seja impossível.

a) $\{(b_1,b_2,b_3,b_4): b_1 = b_3+b_4, b_2 = 2b_3+b_4, b_3 \in \mathbb{R}, b_4 \in \mathbb{R}\}$; **b)** 2; **c)** $(1,0,0,0)$

8. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e o sistema $(A-\lambda I)x = \vec{0}$, com $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   a) Indique a característica de $A-\lambda I$ em função de λ. Para que valores de λ o sistema é indeterminado?

   b) Mostre que se $v \in \mathbb{R}^3$ é solução do sistema, então $Av = \lambda v$.

   c) Resolva o sistema considerando $\lambda = -1$. Interprete geometricamente o conjunto das soluções.

a) $\text{car}(A) = 2$ se $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$ e $\text{car}(A) = 3$ para $\lambda \neq -1, 2$. O sistema é indeterminado para $\lambda = -1$ ou $\lambda = 2$. **c)** $CS = \{((x_1,x_2,x_3): x_1 = -x_3, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}$ que representa a reta que passa na origem e tem vetor diretor $(-1,-1,1)$

9. Considere $A = \begin{bmatrix} \alpha & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3+\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   a) Discuta o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e a β.

   b) Resolva o sistema $Ax = b$, considerando $\alpha = 0$ e $\beta = -3$.

   c) Indique, justificando, um valor de α para o qual a matriz A é invertível.

10. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3\alpha \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6\beta \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (a) Discuta o sistema $Ax = b$ em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (b) Indique os valores de α, β para os quais A é invertível.

   (c) Considere $\alpha = 0$ e inverta a matriz A.

   a) Se $\alpha \neq 1$ é PD $\forall \beta$. Se $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ é PI. Se $\alpha = 1$ e $\beta \neq 0$ é IMP; **b)** $\alpha \neq 1$;
   c) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

11. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas invertíveis de ordem n. Resolva, caso seja possível, as seguintes equações matriciais (em ordem a X):

    (a) $(C+X)A=D$.

    (b) $B(CA+3X)=DX$.

    (c) $ABX=I$.

    (d) $3X+AX=I$.

    (e) $(AB)^{-1}BAX=I$.

    (f) $(X-A)^2=B+(X-A)X$.

    (g) $ABX(AB)^{-1}=I$.

    (h) $BX+XA=I$.

    a) $X=DA^{-1}-C$; **b)** Não é possível; **c)** $X=B^{-1}A^{-1}$; **d)** Não é possível; **e)** $X=A^{-1}B^{-1}AB)$; **f)** $X=A-BA^{-1}$; **g)** $X=I$; **h)** Não é possível

12. Considere $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine a inversa de A (caso exista).

    (b) Resolva a equação matricial $AX=B$.

    a) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & -6 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; **b)** $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -15 & -6 \\ -5 & 0 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

13. Seja A uma matriz quadrada tal que $A^3=0$.

    Mostre que $I-A$ é invertível com inversa $I+A+A^2$.

14. Escreva uma equação vetorial equivalente a

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

    a) $x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$; **b)**$x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

15. Interprete geometricamente a transformação linear definida pela matriz $A = \text{diag}(a, b, c)$, com $a, b, c > 0$.

    A matriz A pode ser escrita como o produto das matrizes (a ordem é irrelevante neste caso),

    $$A_{x,a} = \text{diag}(a, 1, 1), \quad A_{y,b} = \text{diag}(1, b, 1), \quad A_{z,c} = \text{diag}(1, 1, c), \qquad \text{(verifique!)}.$$

    Isto significa que a transformação linear definida por A corresponde à composição das transformações lineares definidas por cada uma dessas matrizes. Por sua vez cada uma dessas transformações lineares corresponde a uma dilatação ou a uma contração no espaço segundo o eixo indicado, se o valor do respectivo parâmetro for superior ou inferior a 1 e corresponde à identidade em $\mathbb{R}^3$, caso esse valor seja 1.

16. Interprete a transformação geométrica do plano, dita transformação *afim*,

    $$T(x, y) = (x + a, y + b), \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

    e indique os valores de a e b para os quais a transformação é também linear.

    Trata-se de uma translação no plano definida pelo vetor (a, b). Uma vez que $T(0,0) = (a, b)$, a transformação afim não é linear se $(a, b) \neq (0,0)$ (ver os slides). Quando $(a, b) = (0,0)$ a transformação afim é linear pois reduz-se à transformação identidade em $\mathbb{R}^2$, que é definida pela matriz I_2.