Inversa de uma matriz

Definição de inversa

Uma matriz quadrada A de ordem n diz-se *invertível* ou *não singular* se existir uma matriz quadrada B da mesma ordem que A tal que

$$AB = I_n \qquad \text{e} \qquad BA = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Caso contrário, A diz-se *singular*. A matriz B, quando existe, designa-se por *inversa* de A.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.
De facto, tem-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ BA &= \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matrix quadrada nula de ordem n, $[0]_{n\times n}$, é singular $\forall n$ (porquê?).

Observações

- Pode-se mostrar que

$$AB = I_n \quad \Rightarrow \quad BA = I_n,$$

  e que

$$BA = I_n \quad \Rightarrow \quad AB = I_n.$$

- Logo para mostrar que A é invertível **basta** encontrar uma matriz quadrada B da mesma ordem que A que verifique uma das relações:

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

  Nessa altura, B é inversa de A. Da relação anterior resulta também que B é invertível com inversa A.

Exercícios na aula

- Mostre que se B é inversa de A^2 então AB é inversa de A
- Mostre que se $A_{n\times n}$ verifica $A^3 - 3A - I_n = 0$ então A é invertível.

Unicidade da inversa

Proposição

A inversa de uma matriz A, quando existe, é única e denota-se por A^{-1}.

Demonstração da proposição

Temos que mostrar que se B e C forem inversas arbitráricas de A então têm que ser iguais. Como B é inversa de A tem-se, em particular,

$$BA = I.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade à direita por C tem-se

$$BAC = C,$$

donde resulta imediatamente $B = C$ uma vez que $AC = I$. $\square$

Por exemplo, considerando as matrizes do exemplo do slide 55, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Inversa de matrizes diagonais

Vamos calcular inversa (caso exista) da matrix diagonal $\mathrm{diag}(2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
Queremos uma matriz quadrada de ordem 2, $B = [b_{ij}]$, tal que $AB = I_2$. Ora,

$$\begin{aligned}
AB = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ \hline 0 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2\,b_{11} & 2\,b_{12} \\ 3\,b_{21} & 3\,b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2} \\ b_{12} = b_{21} = 0 \\ b_{22} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(2^{-1}, 3^{-1}).
\end{aligned}$$

Em geral, temos o seguinte resultado.

Proposição

A matriz diagonal $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é invertível se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, tendo-se nessa caso

$$\mathrm{diag}^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

Inversa de uma matriz 2×2 não diagonal

- Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Para determinar a sua inversa, caso exista, vamos resolver a equação matricial,

$$AX = I_2,$$

cuja solução corresponde à inversa de A. Pela unicidade da inversa a solução, caso exista, tem que ser única.

- Escrevendo, $X = [\,x \quad y\,] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ e $I_2 = [\,e_1 \quad e_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned} AX = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad A\,[\,x \quad y\,] = [\,e_1 \quad e_2\,] \\ &\Leftrightarrow \quad [\,Ax \quad Ay\,] = [\,e_1 \quad e_2\,] \quad \text{(ver o slide 29)} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Ax = e_1 \dashrightarrow [A|e_1] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ \\ Ay = e_2 \dashrightarrow [A|e_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Redução simultânea de sistemas lineares e inversa

- Obtivemos 2 sistemas lineares com a mesma matriz de coeficientes A.
- Podemos reduzir simultaneamente ambos os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$, ampliando A com e_1, e_2, isto é, com a matriz identidade I_2.

  Aplicando a fase descendente tem-se,

$$[\,A\,|\,I_2\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{cases}$$

  Logo os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são ambos PD, e portanto $AX = I_2$ é PD, com solução única $X = A^{-1}$. Em particular, A é invertível.

- Aplicando a fase ascendente tem-se,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

  Logo as soluções de $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, obtendo-se

$$A^{-1} = X = [\,x \quad y\,] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inversa e redução simultânea de sistemas (caso geral)

- De modo análogo pode-se mostrar que resolver a equação matricial $AX = I_n$ com A matriz arbitrária de ordem n, equivale a resolver n sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$[\,A\,|\,e_1\,], \quad [\,A\,|\,e_2\,], \quad \cdots, \quad [\,A\,|\,e_n\,], \tag{1}$$

  onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as n colunas da matriz identidade I_n.
- Como os n sistemas têm a mesma matriz de coeficientes A podem ser reduzidos simultaneamente aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A\,|\,e_1\ e_2\ \cdots\ e_n\,] = [\,A\,|\,I_n\,]$.
- Pela **unicidade da inversa**, um dos dois casos tem que ocorrer:
  - os n sistemas (1) são todos PD - nessa altura A é invertível e as n colunas de A^{-1} são as soluções dos n sistemas (1);
  - pelo menos um dos n sistemas (1) é impossível - nessa altura A é singular.
- A redução simultânea de sistemas pode também ser aplicada para resolver equações matriciais mais gerais, do tipo $AX = B$, aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A\,|\,B\,]$...

Algoritmo da inversa

Das considerações dos slide anterior deduz-se o seguinte algoritmo.

- `Input:` Matriz quadrada A
- `Objectivo:` Decidir sobre a invertibilidade de A e calcular A^{-1}

$$[\,A\,|\,I\,] \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underset{(A' \text{ em escada})}{[\,A'\,|\,I'\,]} \xrightarrow{\text{(se } A \text{ invertível)}} \cdots \longrightarrow [\,I\,|\,A^{-1}\,]$$

Existem linhas nulas em A' $\Downarrow$ A é singular — STOP

Não existem linhas nulas em A' $\Downarrow$ A é invertível

Algoritmo da inversa - exercício

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Qual é a solução do sistema linear $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: ver o slide 61.)

Resolução aplicando o algoritmo da inversa

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A'\,|\,I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e não tem linhas nulas. Logo A é invertível. Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss vem,

$$[\,A'\,|\,I'\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\,I\,|\,A^{-1}\,].$$

Podemos confirmar que A^{-1} está bem calculada verificando a relação $AA^{-1} = I$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & o \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

Note que vetor $(1, 0, 0)$ é a 1ª coluna da matriz identidade, que denotámos por e_1, e portanto pelos considerações do slide 61 a solução de $Ax = e_1$ é a primeira coluna da matriz A^{-1}, isto é, o vetor $(-1, 0, -1)$.

Propriedades da inversa

Proposição

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. A^{-1} é invertível e tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA é invertível para todo o $\lambda \neq 0$ e tem-se $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa([6]).
4. A^k é invertível para todo o $k \in \mathbb{N}$ e tem-se $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(A demonstração das propriedades será feita nas aulas práticas.)

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz invertível, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

[6] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1 A_2 \cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Característica de uma matriz

Definição de característica

A característica de uma matriz A, denotada $\mathrm{car}(A)$, é o número de pivots de qualquer matriz em escada que seja obtida a partir de A, por aplicação das operações elementares do método de eliminação de Gauss.

- A característica está bem definida uma vez que coincide com o número de pivots da matriz reduzida, que é única, e a fase ascendente do método de Gauss não altera o número de pivots.
- $\mathrm{car}(A)$ corresponde também ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em escada obtida a partir de A.
- Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m\times n}$ não pode ultrapassar o número de linhas m nem o número de colunas n de A, isto é,
$$\mathrm{car}(A) \leq \min\{m, n\}.$$
- Pode-se provar ainda que para qualquer matriz $A_{m\times n}$ se tem a relação:
$$\mathrm{car}(A^T) = \mathrm{car}(A).$$

Exemplo

- Se, por exemplo,

$$A_{4\times 5} \rightarrow^{\text{oper. elementares}} \cdots \rightarrow A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4\times 5},$$

tem-se $\text{car}(A) = 3 \leq \min\{4, 5\}$.

Questão

Considerando a mesma matriz A do exemplo acima, qual seria o número de linhas nulas de uma matriz em escada que fosse obtida a partir de A^T por aplicação de operações elementares?

Inversa e característica

Uma vez que uma matriz **quadrada** em **escada** só possui linhas nulas se existirem colunas sem pivot, obtém-se imediatamente o seguinte importante critério de invertibilidade.

Teorema (critério de invertibilidade)

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Exercício na aula

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Resolução: Aplicando a fase descendente do método de Gauss tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 2\alpha & 6+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se que $A_{3\times 3}$ é ínvertível se e só se $\text{car}(A) = 3$ se e só se $\alpha \neq 0, 2$.

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, admite a solução única $x = \dfrac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$.
- A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Proposição

Se A é uma matriz invertível de ordem n então o sistema linear $Ax = b$ é PD com solução única $x = A^{-1}b$ qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^n$.

De facto, se A é invertível, existe A^{-1} e podemos escrever, multiplicando à esquerda ambos os membros da equação matricial $Ax = b$ por A^{-1},

$$\begin{aligned} Ax = b \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad I\,x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares - exemplo

Consideremos o sistema linear $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ é matriz invertível do slide 64 e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Uma vez que A é uma matriz invertível de ordem 3, conclui-se da proposição do slide anterior que o sistema $Ax = b$ é PD e tem como única solução,

$$x \;=\; A^{-1}b = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \text{(Confirme!)}$$

Note que a matriz A^{-1} foi determinada no slide 64.