

# Estatística e Delineamento Experimental 2025/2026

## Modelo Linear

Elsa Gonçalves  
Secção de Matemática, DCEB, ISA-Ulisboa

(Adaptado, Cadima J. (2021). O Modelo Linear, ISA, ULLisboa)

## Regressão Linear Múltipla - Abordagem Descritiva

Quando é necessária **mais do que uma variável preditora** para modelar adequadamente a variável resposta de interesse.

## Plano em $\mathbb{R}^3$

Qualquer plano em  $\mathbb{R}^3$ , no sistema  $xOyOz$ , tem equação

$$Ax + By + Cz + D = 0 .$$

No nosso contexto, e colocando:

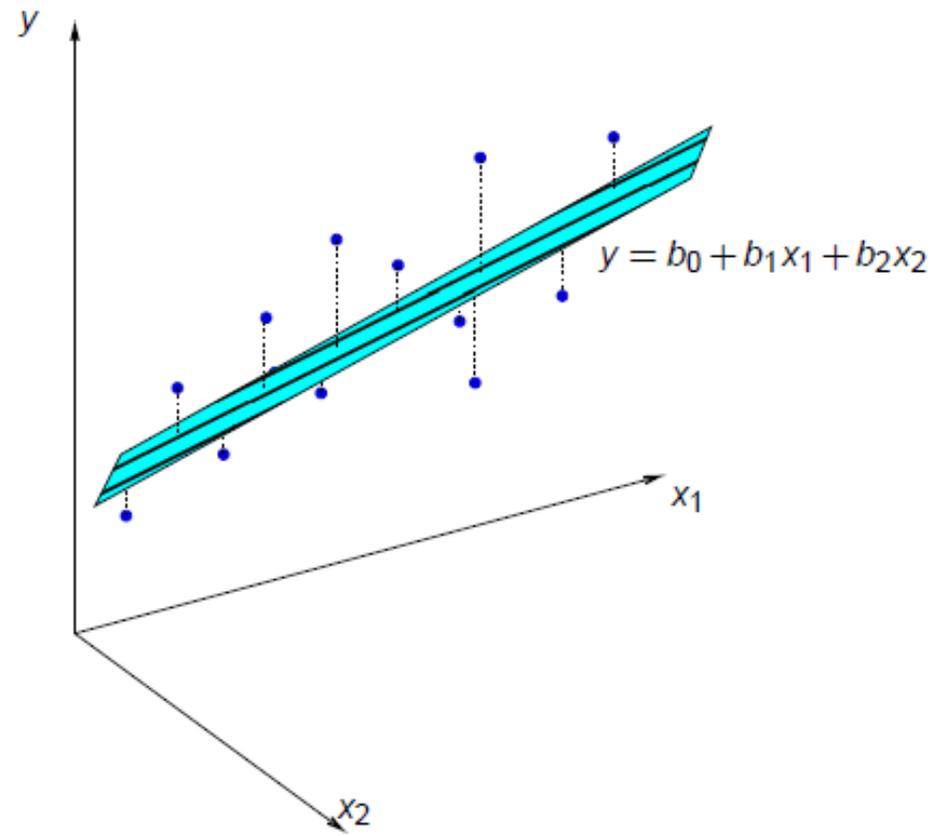
- no eixo vertical ( $z$ ) a variável resposta  $Y$ ;
- noutro eixo ( $x$ ) um preditor  $X_1$ ;
- no terceiro eixo ( $y$ ) o outro preditor  $X_2$ ,

A equação fica (no caso geral de planos não verticais, com  $C \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} Ax_1 + Bx_2 + Cy + D = 0 &\Leftrightarrow y = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C}x_1 - \frac{B}{C}x_2 \\ &\Leftrightarrow y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \end{aligned}$$

Esta equação generaliza a equação da recta, para o caso de haver dois preditores.

## Regressão Múltipla - representação gráfica ( $p = 2$ )



$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$  é a equação dum plano em  $\mathbb{R}^3$  ( $x_1, x_2, y$ ).  
Pode ser ajustado pelo mesmo critério que na RLS: minimizar SQRE.

## O caso geral: $p$ preditores

Para modelar uma variável resposta  $Y$  com base numa regressão linear sobre  $p$  variáveis preditoras,  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , admite-se que os valores de  $Y$  oscilam em torno duma combinação linear (afim) das  $p$  variáveis preditoras:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p .$$

Trata-se da equação dum hiperplano em  $\mathbb{R}^{p+1}$ , que define a relação de fundo entre  $y$  e os  $p$  preditores.

Tal como na Regressão Linear Simples, admite-se que dispomos de  $n$  conjuntos de observações para ajustar este hiperplano:

$$\left\{ (x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{p(i)}, y_i) \right\}_{i=1}^n .$$

Não é possível visualizar a nuvem de pontos das observações se  $p > 2$ .

# Regressão Múltipla: o hiperplano ajustado

Admite-se que os valores de  $y$  oscilam em torno duma combinação linear (afim) das  $p$  variáveis preditoras:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p .$$

Trata-se da equação dum **hiperplano** em  $\mathbb{R}^{p+1}$ .

O **critério** utilizado para ajustar um hiperplano à nuvem de  $n$  pontos em  $\mathbb{R}^{p+1}$  é o de **minimizar a Soma de Quadrados dos Resíduos**, ou seja, escolher os  $p+1$  parâmetros  $\{b_j\}_{j=0}^p$  que minimizem:

$$SQRE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

onde os  $y_i$  representam os valores observados da variável resposta e

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}$$

os **valores ajustados** pela equação do hiperplano.

# Duas abordagens para a estimação dos parâmetros

Para obter os parâmetros que definem o hiperplano que melhor se ajusta às observações pode-se usar uma abordagem:

- analítica; ou
- geométrica.

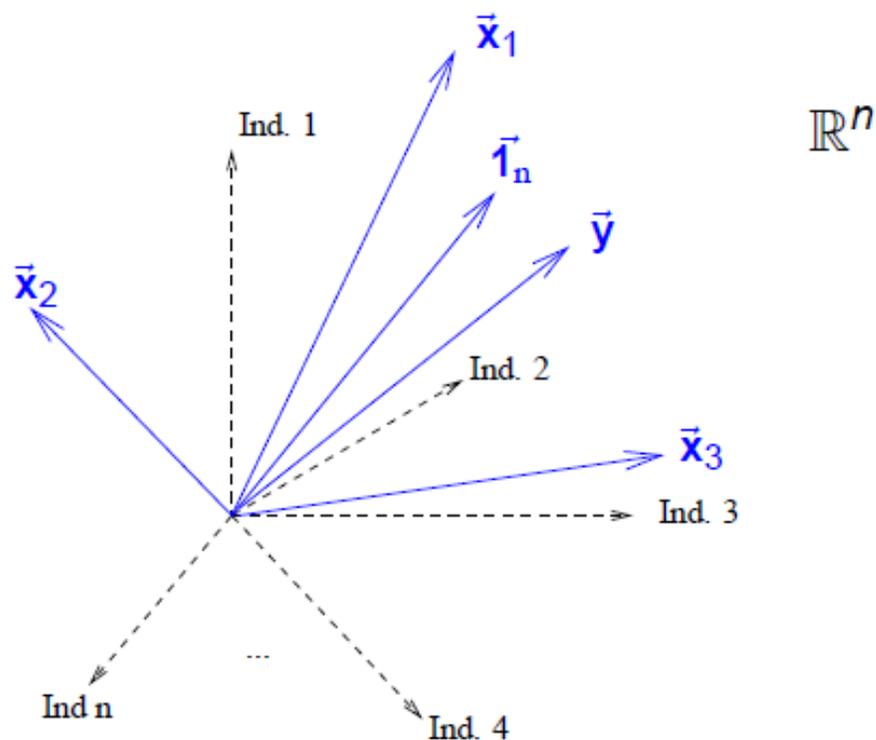
Nas duas abordagens, a notação vectorial-matricial é vantajosa.

Não existem fórmulas simples, como no caso da RLS, para cada um dos parâmetros  $b_j$  isoladamente. Mas é possível indicar uma fórmula única matricial para o conjunto dos  $p + 1$  parâmetros do modelo.

## A representação em $\mathbb{R}^n$ , o espaço das variáveis

- cada eixo corresponde a um indivíduo observado;
- cada vector corresponde a uma variável.

O vector de  $n$  uns, representado por  $\vec{1}_n$ , também é útil.



Os  $n$  valores ajustados  $\hat{y}_i$  também definem um vector de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{\hat{y}}$ :

$$\begin{aligned}\vec{\hat{y}} &= \begin{bmatrix} \hat{y}_1 \\ \hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 \\ \dots \\ \hat{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 x_{1(1)} + b_2 x_{2(1)} + \dots + b_p x_{p(1)} \\ b_0 + b_1 x_{1(2)} + b_2 x_{2(2)} + \dots + b_p x_{p(2)} \\ b_0 + b_1 x_{1(3)} + b_2 x_{2(3)} + \dots + b_p x_{p(3)} \\ \dots \\ b_0 + b_1 x_{1(n)} + b_2 x_{2(n)} + \dots + b_p x_{p(n)} \end{bmatrix} \\ &= b_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} x_{1(1)} \\ x_{1(2)} \\ x_{1(3)} \\ \vdots \\ x_{1(n)} \end{bmatrix} + \dots + b_p \begin{bmatrix} x_{p(1)} \\ x_{p(2)} \\ x_{p(3)} \\ \vdots \\ x_{p(n)} \end{bmatrix} \\ &= b_0 \vec{\mathbf{1}}_n + b_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + b_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \dots + b_p \vec{\mathbf{x}}_p\end{aligned}$$

O vector  $\vec{\hat{y}}$  é uma **combinação linear** dos vectores  $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$

# A matriz do modelo $\mathbf{X}$

O vector  $\vec{\hat{y}}$  dos valores ajustados pode também escrever-se como um produto envolvendo uma matriz  $\mathbf{X}$  cujas colunas sejam os vectores  $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$ .

## A matriz $\mathbf{X}$ do modelo

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{1(1)} & x_{2(1)} & \cdots & x_{p(1)} \\ 1 & x_{1(2)} & x_{2(2)} & \cdots & x_{p(2)} \\ 1 & x_{1(3)} & x_{2(3)} & \cdots & x_{p(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1(n)} & x_{2(n)} & \cdots & x_{p(n)} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\vec{\mathbf{1}}_n} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\vec{\mathbf{x}}_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\vec{\mathbf{x}}_2} \quad \cdots \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\vec{\mathbf{x}}_p}$

A matriz do modelo  $\mathbf{X}$  é de dimensão  $n \times (p+1)$ .

O vector  $\vec{\hat{y}}$  pode ser escrito desta forma:  $\vec{\hat{y}} = \mathbf{X}\vec{\mathbf{b}}$

# A matriz do modelo $\mathbf{X}$ e o seu subespaço de colunas

- O conjunto de **todas** as combinações lineares dum conjunto de vectores chama-se o **subespaço gerado** (**spanned**) por esses vectores.
- O subespaço gerado pelas colunas da matriz do modelo  $\mathbf{X}$  chama-se **subespaço das colunas** (**column-space**) da matriz  $\mathbf{X}$ ,  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- O vector  $\vec{\hat{y}}$  pertence ao subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$   
(os vectores  $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$  são colunas  $\mathbf{X}$  e  $\vec{\hat{y}} = b_0 \vec{\mathbf{1}}_n + b_1 \vec{\mathbf{x}}_1 + b_2 \vec{\mathbf{x}}_2 + \dots + b_p \vec{\mathbf{x}}_p$ ).
- $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathcal{C}(\mathbf{X}) \subset \mathbb{R}^n$ ), mas de **dimensão  $p+1$**   
(se as colunas de  $\mathbf{X}$  forem **linearmente independentes**, isto é, se nenhum vector se puder escrever como combinação linear dos restantes).
- Qualquer combinação linear das colunas da matriz  $\mathbf{X}$ , ou seja, **qualquer elemento de  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$**  se pode escrever como  $\mathbf{X}\vec{\mathbf{a}}$ , onde  $\vec{\mathbf{a}} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  é o vector dos coeficientes da combinação linear.

# Os parâmetros

- Cada escolha possível de coeficientes  $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p)$  corresponde a um ponto/vector no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- Essa escolha de coeficientes é **única** caso as colunas de  $\mathbf{X}$  sejam linearmente independentes, isto é, se não houver dependência linear (**multicolinearidade**) entre as variáveis  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, \vec{1}_n$ .
- Um dos pontos/vectores do subespaço é a combinação linear dada pelo vector de coeficientes  $\vec{b} = (b_0, b_1, \dots, b_p)$  que minimiza:

$$SQRE = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

onde os  $y_i$  são os valores observados da variável resposta e  $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}$  os **valores ajustados**. É a combinação linear que desejamos determinar.

Como identificar esse ponto/vector?

## O critério minimiza *SQRE*

O vector  $\vec{\hat{y}}$  que minimiza a distância ao vector de observações  $\vec{y}$  minimiza também o *quadrado dessa distância*, que é dado por:

$$\text{dist}^2(\vec{y}, \vec{\hat{y}}) = \|\vec{y} - \vec{\hat{y}}\|^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \text{SQRE} .$$

Ou seja, o critério *minimiza a soma de quadrados dos resíduos*.

$$\frac{\partial \text{SQRE}}{\partial \vec{b}} = \mathbf{0}$$

Os parâmetros ajustados na RL Múltipla

$$\vec{b} = (\mathbf{X}^t \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^t \vec{y} .$$

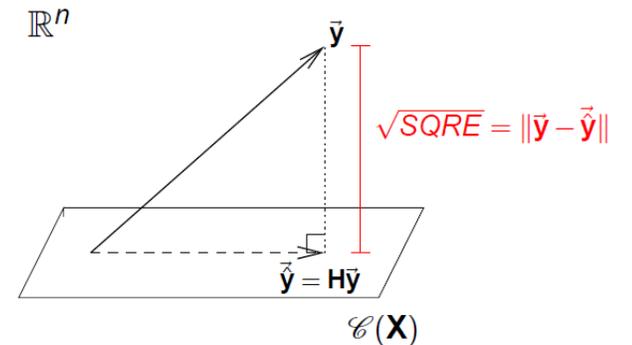
## Ou, usando argumentos geométricos

- Dispomos de um vector de  $n$  observações de  $\vec{y}$  que está em  $\mathbb{R}^n$  mas, em geral, não está no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- Queremos aproximar esse vector por outro vector,  $\vec{\hat{y}} = b_0 \vec{1}_n + b_1 \vec{x}_1 + \dots + b_p \vec{x}_p$ , que está no subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ .
- Vamos aproximar o vector de observações  $\vec{y}$  pelo vector  $\vec{\hat{y}}$  do subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  que está mais próximo de  $\vec{y}$ .

### SOLUÇÃO:

Tomar a projecção ortogonal de  $\vec{y}$  sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ :  $\vec{\hat{y}} = \mathbf{H}\vec{y}$ .

SQRE na projecção ortogonal



O quadrado da distância de  $\vec{y}$  a  $\vec{\hat{y}}$  é SQRE, a soma dos quadrados dos resíduos.

## A projecção ortogonal

A projecção ortogonal de um vector  $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$  sobre o subespaço  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$  gerado pelas colunas (linearmente independentes) de  $\mathbf{X}$  faz-se pré-multiplicando  $\vec{y}$  pela matriz de projecção ortogonal sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ :

Matriz de projecção ortogonal sobre  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t.$$

As matrizes de projecção ortogonal  $\mathbf{P}$  sobre algum subespaço de  $\mathbb{R}^n$  são as matrizes  $n \times n$ :

- simétricas (isto é,  $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}$ ); e
- idempotentes (isto é,  $\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{P}$ ).

A matriz  $\mathbf{H}$  tem estas propriedades (verifique!).

# A projecção ortogonal no contexto da RLM

No contexto duma regressão linear múltipla, tem-se:

$$\begin{aligned} \vec{\hat{y}} &= \mathbf{H}\vec{y} \\ \Leftrightarrow \vec{\hat{y}} &= \mathbf{X} \underbrace{(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y}}_{=\vec{b}} \end{aligned}$$

A combinação linear dos vectores  $\vec{\mathbf{1}}_n, \vec{\mathbf{x}}_1, \dots, \vec{\mathbf{x}}_p$  que gera o vector mais próximo de  $\vec{y}$  tem coeficientes dados pelos elementos do vector  $\vec{b}$ :

O vector de parâmetros ajustado

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y} .$$

Quando  $p = 1$  (RLS):  $\vec{b} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y} = \begin{bmatrix} \bar{y} - b_1\bar{x} \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$

# As três Somas de Quadrados

Na Regressão Linear Múltipla definem-se três Somas de Quadrados, de forma idêntica ao que se fez na Regressão Linear Simples:

**SQRE** – Soma de Quadrados dos Resíduos (já definida):

$$SQRE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 .$$

**SQT** – Soma de Quadrados Total:

$$SQT = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 .$$

**SQR** – Soma de Quadrados associada à Regressão:

$$SQR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n \hat{y}_i^2 - n\bar{y}^2 .$$

$$SQT = SQR + SQRE$$

Nota: Também na RL Múltipla os  $y$  observados ( $y_i$ ) e os  $y$  ajustados ( $\hat{y}_i$ ) têm a mesma média.

O Coeficiente de Determinação na Regressão Linear  $R^2 = \frac{SQR}{SQT}$

# Algumas propriedades dos hiperplanos ajustados

Numa regressão linear múltipla verifica-se:

- a média dos valores observados de  $Y$ ,  $\{y_i\}_{i=1}^n$ , é igual à média dos respectivos valores ajustados,  $\{\hat{y}_i\}_{i=1}^n$ .
- O hiperplano ajustado em  $\mathcal{R}^{p+1}$  contém o centro de gravidade da nuvem de pontos, i.e., o ponto de coordenadas  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p, \bar{y})$ :

$$\bar{y} = \bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underbrace{(b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)})}_{=\hat{y}_i} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p$$

- o coeficiente  $b_j$  que multiplica o preditor  $X_j$  é a variação média em  $Y$ , associada a aumentar  $X_j$  em 1 unidade, **mantendo os restantes preditores constantes**.
- o valor de  $R^2$  numa regressão múltipla não pode ser inferior ao valor de  $R^2$  que se obteria excluindo do modelo um qualquer subconjunto de preditores. Em particular, não pode ser inferior ao  $R^2$  das regressões lineares simples de  $Y$  sobre cada preditor individual.

## Propriedades de modelos com constante aditiva

$\mathcal{C}(\mathbf{X})$  contém o vector  $\vec{\mathbf{1}}_n$  de  $n$  uns. Então  $\mathbf{H}\vec{\mathbf{1}}_n = \vec{\mathbf{1}}_n$ , pois a projecção de qualquer vector num subespaço que já o contém deixa o vector invariante. Logo:

- As médias dos valores observados e ajustados de  $Y$  são iguais:

$$\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = \frac{1}{n} \vec{\mathbf{1}}_n^t \vec{\hat{y}} = \frac{1}{n} \vec{\mathbf{1}}_n^t \mathbf{H} \vec{y} = \frac{1}{n} \vec{\mathbf{1}}_n^t \mathbf{H}^t \vec{y} = \frac{1}{n} (\mathbf{H} \vec{\mathbf{1}}_n)^t \vec{y} = \frac{1}{n} \vec{\mathbf{1}}_n^t \vec{y} = \bar{y}$$

- A soma dos resíduos é zero:

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i) = \bar{y} - \bar{\hat{y}} = 0.$$

- Em  $\mathbb{R}^{p+1}$ , o hiperplano ajustado contém o centro de gravidade da nuvem dos  $n$  pontos observados:  $\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p$ .

Já vimos que  $\bar{y} = \bar{\hat{y}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i$ . Mas  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{y}_i =$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 x_{1(i)} + b_2 x_{2(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}) = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \dots + b_p \bar{x}_p$$

## Os coeficientes $b_j$

O vector dos parâmetros ajustados pelo método dos mínimos quadrados,  $\vec{b} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y}$ , gera  $n$  valores ajustados:

$$\begin{aligned}\vec{\hat{y}} &= \mathbf{H}\vec{y} = \mathbf{X}(\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{y} = \mathbf{X}\vec{b} \\ \Leftrightarrow \hat{y}_i &= b_0 + b_1x_{1(i)} + \dots + b_px_{p(i)} \quad , \quad \forall i.\end{aligned}$$

As unidades de medida:

- de  $b_0$  são iguais às de  $y$  (e às de  $\hat{y}$ ).
- dos parâmetros  $b_j$  das variáveis ( $j \neq 0$ ) são a razão entre as unidades de  $y$  e as do preditor  $x_j$  correspondente.

Os coeficientes  $\{b_j\}_{j=1}^p$  das variáveis preditoras interpretam-se como a diferença (média) em  $y$ , associada a aumentar o preditor  $x_j$  correspondente em uma unidade, mantendo os restantes preditores constantes.

# Resíduos

As **unidades de medida** dos **resíduos**  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  são iguais às de  $y$ :

$$\begin{aligned} e_i &= y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_0 + b_1 x_{1(i)} + \dots + b_p x_{p(i)}) \quad , \quad \forall i \\ \Leftrightarrow \vec{e} &= \vec{y} - \vec{\hat{y}} = \vec{y} - \mathbf{H}\vec{y} \quad , \end{aligned}$$

O vector de **resíduos**,  $\vec{e}$ , também pode ser obtido pré-multiplicando o vector  $\vec{y}$  pela matriz  $\mathbf{I} - \mathbf{H}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $n \times n$ :

$$\vec{e} = \vec{y} - \mathbf{H}\vec{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\vec{y} \quad ,$$

A matriz  $\mathbf{I} - \mathbf{H}$  é simétrica e idempotente, logo também é uma matriz de projecção ortogonal. Projecta sobre o subespaço de  $\mathbb{R}^n$  constituído pelos vectores ortogonais a qualquer vector de  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ , chamado o **complemento ortogonal de  $\mathcal{C}(\mathbf{X})$**  e designado por  $\mathcal{C}(\mathbf{X})^\perp$ .

## A Regressão Linear Múltipla no

O comando `lm` também ajusta uma Regressão Linear Múltipla no . A variável resposta  $y$  e as variáveis preditoras  $x_1, \dots, x_p$  definem-se mediante uma fórmula semelhante à da RLS.

E.g., sendo  $y$  a variável resposta e  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  três preditores, a fórmula que especifica a relação será:

$$y \sim x_1 + x_2 + x_3$$

Comando R para ajustar uma regressão linear múltipla

```
> lm ( y ~ x1 + x2 + x3 + ... + xp, data=dados)
```

O comando devolve o vector  $\vec{b}$  das estimativas dos  $p + 1$  parâmetros do modelo,  $b_0, b_1, \dots, b_p$ .

# Um exemplo de RLM no R

Ilustra-se uma Regressão Linear Múltipla no R, com um conjunto de dados famoso: os lírios de Anderson/Fisher, disponíveis na *data frame* `iris`.

```
> help(iris)
```

```
iris                package:datasets                R Documentation
```

```
Edgar Anderson's Iris Data
```

```
Description:
```

```
This famous (Fisher's or Anderson's) iris data set gives the measurements in centimeters of the variables sepal length and width and petal length and width, respectively, for 50 flowers from each of 3 species of iris. The species are Iris setosa, versicolor, and virginica.
```

## Exemplo RLM (cont.)

Uma inspecção inicial dos dados pode ser feita com o comando `head`, que mostra a parte inicial da *data frame*:

```
> head(iris)
```

```
  Sepal.Length Sepal.Width Petal.Length Petal.Width Species
1           5.1           3.5           1.4           0.2  setosa
2           4.9           3.0           1.4           0.2  setosa
3           4.7           3.2           1.3           0.2  setosa
4           4.6           3.1           1.5           0.2  setosa
5           5.0           3.6           1.4           0.2  setosa
6           5.4           3.9           1.7           0.4  setosa
```

Uma síntese da informação é dado pelo comando `summary`:

```
> summary(iris)
```

```
  Sepal.Length      Sepal.Width      Petal.Length      Petal.Width      Species
Min.   :4.300   Min.   :2.000   Min.   :1.000   Min.   :0.100   setosa   :50
1st Qu.:5.100   1st Qu.:2.800   1st Qu.:1.600   1st Qu.:0.300   versicolor:50
Median :5.800   Median :3.000   Median :4.350   Median :1.300   virginica :50
Mean   :5.843   Mean   :3.057   Mean   :3.758   Mean   :1.199
3rd Qu.:6.400   3rd Qu.:3.300   3rd Qu.:5.100   3rd Qu.:1.800
Max.   :7.900   Max.   :4.400   Max.   :6.900   Max.   :2.500
```

Note-se que a quinta coluna é um `factor`. Será, para já, ignorado.

# A Regressão Múltipla descritiva no (cont.)

Ajuste-se um modelo para prever a variável resposta largura da pétala, a partir do comprimento da pétala e das duas medições das sépalas (largura e comprimento), ignorando as espécies.

## RL Múltipla - dados dos lírios

```
> iris2.lm <- lm(Petal.Width ~ Petal.Length + Sepal.Length +  
+ Sepal.Width , data=iris)
```

```
> iris2.lm
```

```
(...)
```

```
Coefficients:
```

(Intercept)	Petal.Length	Sepal.Length	Sepal.Width
-0.2403	0.5241	-0.2073	0.2228

O hiperplano ajustado em  $\mathbb{R}^4$  ( $\mathbb{R}^{p+1}$ ) é:

$$PW = -0.2403 + 0.5241 PL - 0.2073 SL + 0.2228 SW$$

## Confirmando as fórmulas (cont.)

Vamos confirmar a fórmula dos parâmetros ajustados pelo método dos mínimos quadrados. O comando `model.matrix` devolve a matriz **X**.

```
> X <- model.matrix(iris2.lm)
> X
```

	(Intercept)	Petal.Length	Sepal.Length	Sepal.Width
1	1	1.4	5.1	3.5
2	1	1.4	4.9	3.0
3	1	1.3	4.7	3.2
4	1	1.5	4.6	3.1
5	1	1.4	5.0	3.6
6	1	1.7	5.4	3.9
7	1	1.4	4.6	3.4
8	1	1.5	5.0	3.4
[...]				
149	1	5.4	6.2	3.4
150	1	5.1	5.9	3.0

## Confirmando as fórmulas (cont.)

Os comandos do R para as operações matriciais necessárias para o cálculo de  $\vec{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}^t\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^t\vec{\mathbf{y}}$  são:

- `t(A)` indica a transposta da matriz A
- `A %*% B` indica o produto das matrizes A e B.
- `solve(A)` calcula a inversa da matriz A.

```
> y <- iris$Petal.Width  
> b <- solve( t(X) %*% X ) %*% ( t(X) %*% y )  
> b
```

```
          [,1]  
(Intercept) -0.2403074  
Petal.Length  0.5240831  
Sepal.Length -0.2072661  
Sepal.Width   0.2228285
```

# Modelos e submodelos

## Submodelos

Dado um modelo de regressão linear múltipla, com equação

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_px_p ,$$

chama-se **submodelo** a uma regressão linear com apenas **alguns** preditores.

Por exemplo, a regressão linear **simples**

$$Petal.Width = b_0 + b_1Petal.Length$$

é um **submodelo** da regressão linear múltipla acabada de ajustar,

$$Petal.Width = b_0 + b_1Petal.Length + b_2Sepal.Length + b_3Sepal.Width$$

Nota: Um submodelo (S) não pode ter preditores que não façam parte do modelo completo (C). A variável resposta tem de ser a mesma.

## O $R^2$ de submodelos

Coeficientes de Determinação de submodelos:  $R_s^2 \leq R_c^2$

O  $R_s^2$  dum submodelo não pode exceder o  $R_c^2$  do modelo completo.

O subespaço das colunas do submodelo tem de estar contido no subespaço das colunas do modelo completo:  $\mathcal{C}(\mathbf{X}_s) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X}_c)$ . Logo, o ângulo entre  $\vec{y}$  e  $\vec{y}_s \in \mathcal{C}(\mathbf{X}_s)$  não pode ser menor que o ângulo entre  $\vec{y}$  e  $\vec{y}_c \in \mathcal{C}(\mathbf{X}_c)$ , pois  $\vec{y}_s$  também pertence a  $\mathcal{C}(\mathbf{X}_c)$ .

### Ainda o exemplo dos lírios

```
> summary(iris2.lm)$r.sq  
[1] 0.9378503  
> iris.lm <- lm(Petal.Width ~ Petal.Length, data = iris)  
> summary(iris.lm)$r.sq  
[1] 0.9271098
```

# Equações de submodelos

Os parâmetros ajustados não são iguais

A equação ajustada num submodelo **não** é a parte correspondente na equação ajustada do modelo.

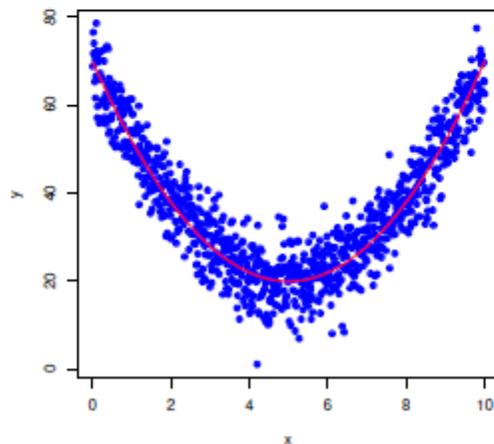
Ainda o exemplo dos lírios

```
> coef(iris.lm)
(Intercept) Petal.Length
-0.3630755    0.4157554
> coef(iris2.lm)
(Intercept) Petal.Length Sepal.Length Sepal.Width
-0.2403074    0.5240831   -0.2072661    0.2228285
```

# Regressão Polinomial

Um caso particular de relação não-linear, mesmo que envolvendo apenas uma variável preditora e a variável resposta, pode ser facilmente tratada no âmbito duma regressão linear múltipla: o caso de relações polinomiais entre  $Y$  e um ou mais preditores.

Imagine-se uma relação de fundo entre uma variável resposta  $Y$  e uma única variável preditora  $X$  dada por uma parábola:

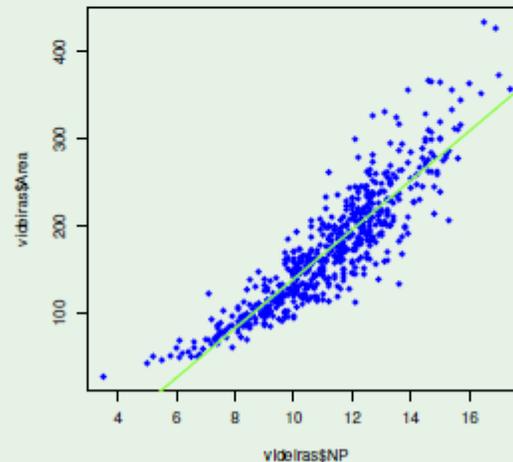


# Regressão Polinomial - Exemplo

## Exemplo 5 – Folhas de videira

Considere os dados de medições sobre  $n=600$  folhas de videira.

Eis o gráfico das áreas vs. comprimentos de nervuras principais, com sobreposta a recta de regressão.



Há uma tendência para curvatura. Talvez um polinómio de 2o. grau?

# Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

Pode ajustar-se uma qualquer parábola, com equação

$$y = b_0 + b_1x + b_2x^2$$

com uma regressão linear de  $y$  sobre os dois preditores  $x_1 = x$  e  $x_2 = x^2$

```
> videiras.lm2 <- lm( Area ~ NP + I(NP^2) , data=videiras )  
> videiras.lm2
```

Call:

```
lm(formula = Area ~ NP + I(NP^2), data = videiras)
```

Coefficients:

(Intercept)	NP	I(NP^2)
7.5961	-0.2172	1.2941

```
> summary( videiras.lm2 )$r.sq
```

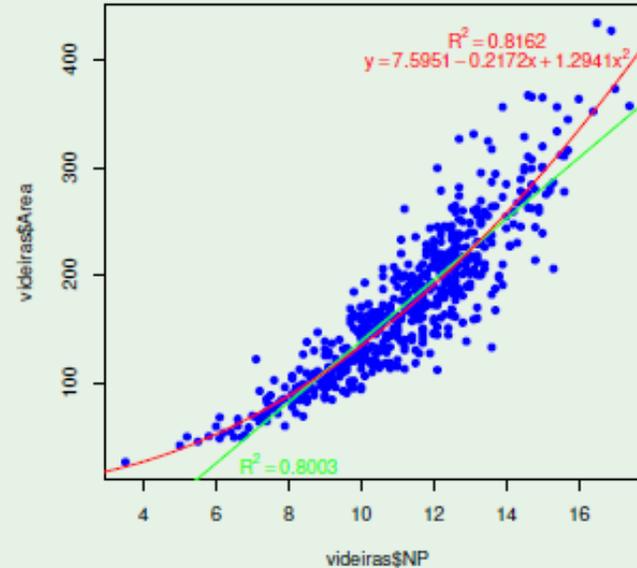
```
[1] 0.8161632
```

A parábola ajustada tem equação  $y = 7.5961 - 0.2172x + 1.2941x^2$ . O valor  $R^2 = 0.8162$  indica que cerca de 82% da variabilidade observada nas áreas foliares é explicada pela regressão quadrática (aqui não houve transformação de  $y$ ).

**Nota:** aplicável a qualquer polinómio de qualquer grau e em qualquer número de variáveis.

# Regressão Polinomial - Exemplo (cont.)

## A parábola ajustada



A equação da recta ajustada é  $y = -144.15 + 28.34x$ , confirmando que a equação ajustada dum submodelo (neste caso, a recta de regressão) **não** é apenas a parte relevante da equação ajustada dum modelo completo (neste caso, o modelo parabólico).