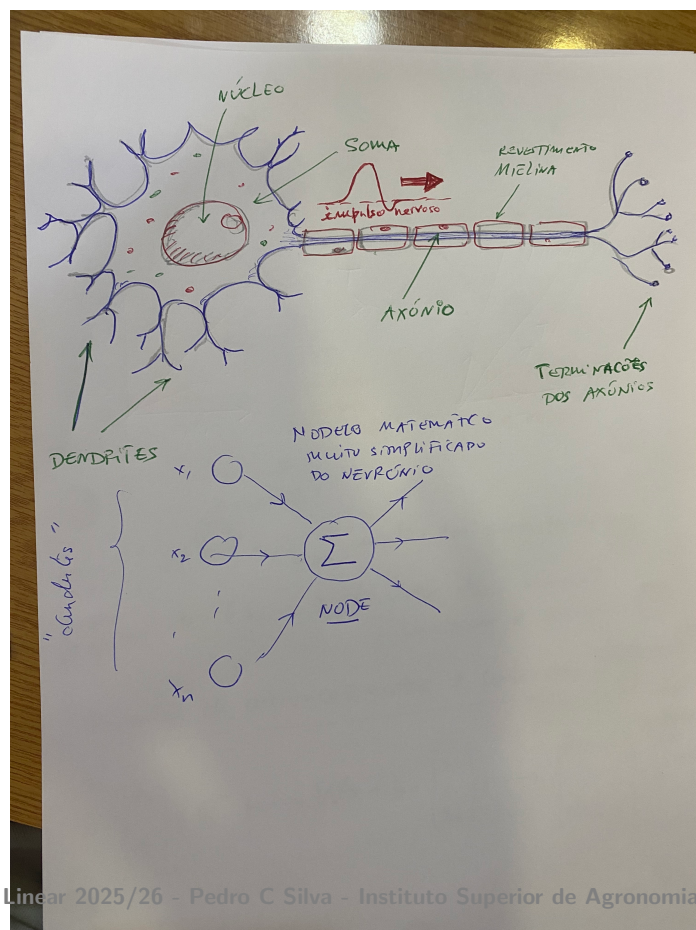
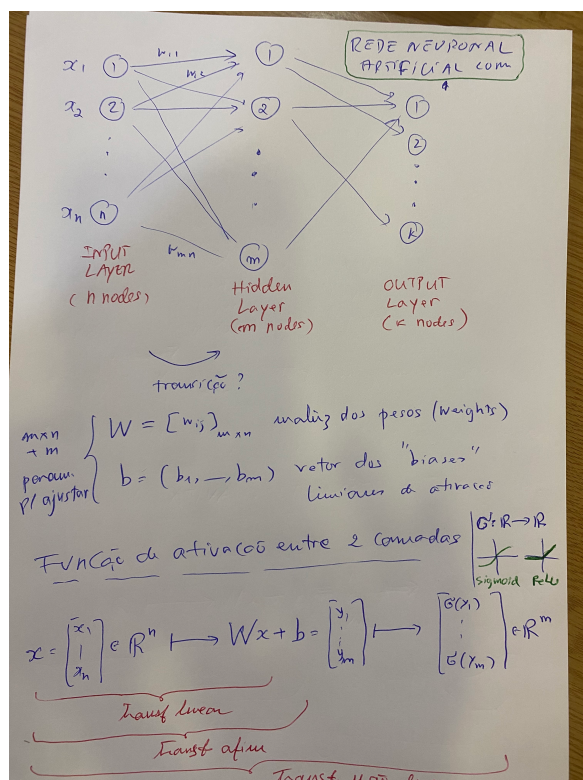


Aplicações do produto de matrizes

- ▶ As operações com matrizes dadas anteriormente permitem definir de forma natural transformações que aplicam vetores de $\mathbb{R}^n$ em vetores de $\mathbb{R}^m$. No caso particular em que essas transformações são obtidas multiplicando uma dada matriz A do tipo $m \times n$ por um vetor de $\mathbb{R}^n$, obtém-se uma classe muito importante de transformações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, ditas **transformações lineares**, que gozam de certas propriedades especiais.
- ▶ Um estudo mais completo das transformações lineares sai fora do âmbito do programa desta UC, pelo que vamos apenas aflorar o tópico referindo algumas ideias chave e conceitos simples que podem ser abordados com a matéria dada sobre matrizes.
- ▶ Antes porém, vamos começar por dar exemplos de aplicação das transformações definidas por matrizes no contexto das redes neurais artificiais e no contexto das transformações geométricas do plano e do espaço.
- ▶ Concluimos então a secção referindo alguns conceitos e propriedades das transformações lineares.

Modelo matemático (muito) simplificado de um neurónio





Transformações definidas por matrizes

Uma matriz $A_{m \times n}$ define de forma natural uma transformação, denotada T_A , que aplica cada vetor x de $\mathbb{R}^n$ no vetor $y = Ax$ de $\mathbb{R}^m$. Mais precisamente,

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Ax. \end{aligned}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, obtém-se a transformação $T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, com

$$\begin{aligned} T_A(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 - x_3). \end{aligned}$$

Transformações geométricas do plano definidas por matrizes $A_{2 \times 2}$

Vejamos alguns exemplos de matrizes $A_{2 \times 2}$ que originam transformações geométricas do plano bem conhecidas dos alunos:

- ▶ A transformação T_A com $A = \alpha I_2$, em que $\alpha > 0$, origina a **homotetia de razão α** :

$$H_\alpha(x_1, x_2) = T_A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{bmatrix} = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Esta transformação é uma **dilatação** ou **contração** consoante $\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$. Para $\alpha = 1$, obtém-se a **transformação identidade**, que **aplica cada vetor $x \in \mathbb{R}^2$ nele próprio**.

- ▶ A transformação T_A com A **matriz de permutação** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, origina a chamada **simetria relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares**:

$$S(x_1, x_2) = T_A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = (x_2, x_1).$$

Transformações geométricas do plano (cont.)

- ▶ A transformação T_A , com $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$, origina a **rotação de θ radianos em torno da origem no sentido direto, isto é, no sentido anti-horário**:

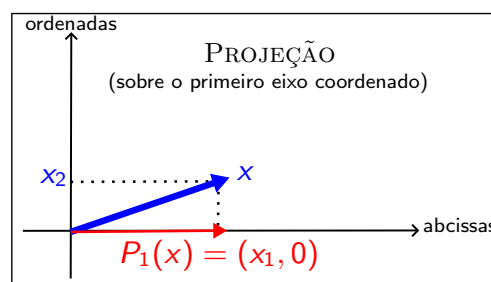
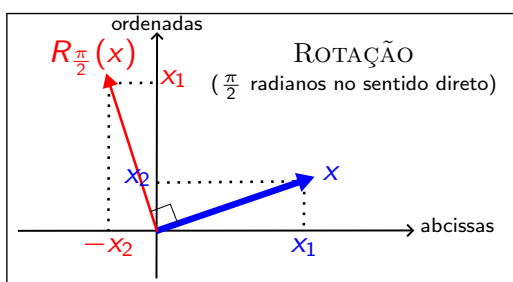
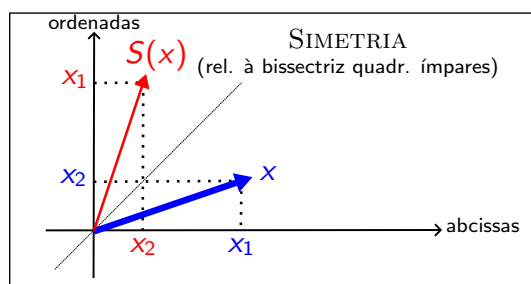
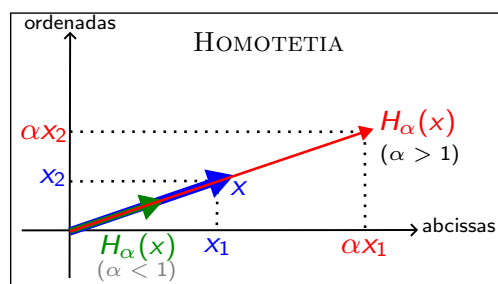
$$\begin{aligned} R_\theta(x_1, x_2) &= T_A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix} = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta). \end{aligned}$$

- ▶ Em particular, considerando no ponto anterior $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtém-se a **rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos em torno da origem no sentido direto**:

$$R_{\frac{\pi}{2}}(x_1, x_2) = (-x_2, x_1).$$

- ▶ Finalmente, a transformação T_A com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ origina a chamada **projecção sobre o primeiro eixo coordenado**:

$$P_1(x_1, x_2) = T_A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} = (x_1, 0).$$



Transformações geométricas no espaço definidas por matrizes $A_{3 \times 3}$

Alguns exemplos de matrizes que originam transformações geométricas do espaço:

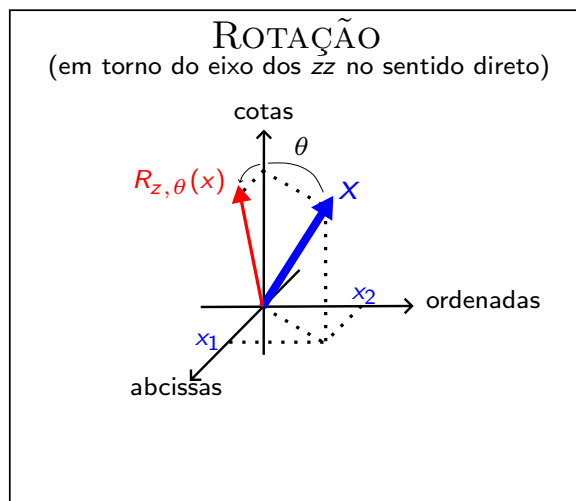
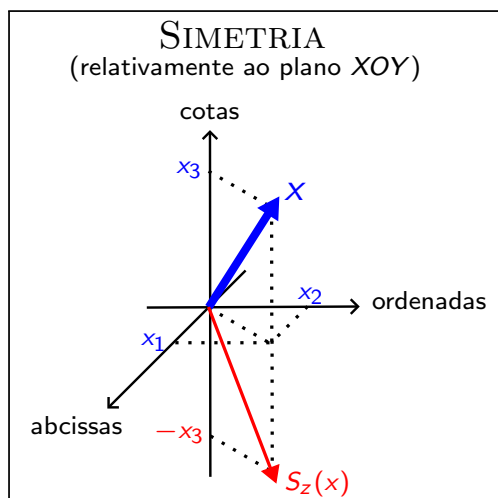
- ▶ Se $A = \alpha I_3$ com $\alpha > 0$ obtém-se a **homotetia no espaço de razão α** :

$$H_\alpha(x) = T_A(x_1, x_2, x_3) = (\alpha I_3)x = \alpha x.$$

- ▶ Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ obtém-se a **simetria em relação ao plano xOy** :

$$S_z(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = (x_1, x_2, -x_3).$$

- ▶ Se $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ obtém-se a **rotação de θ radianos em torno do eixo dos zz** (no sentido direto), $R_{z,\theta}$, que se deixa como exercício descrever em coordenadas.
- ▶ Deixa-se ainda como exercício os alunos indicarem as matrizes associadas às rotações no espaço no sentido direto em torno do eixo dos xx , $R_{x,\theta}$, e do eixo dos yy , $R_{y,\theta}$.



Transformações lineares

Uma transformação $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diz-se **linear** se verificar as seguintes propriedades para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- ▶ $T(x + y) = T(x) + T(y)$ (**aditividade**),
- ▶ $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ (**homogeneidade**).

É imediato verificar que **toda a transformação T_A é linear**, o que se deixa como exercício provar. Reciprocamente, todas as transformações lineares podem ser definidas a partir de matrizes. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ pode ser definida como uma transformação T_A , considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}_{m \times n},$$

que se designa por **matriz canónica da transformação linear**⁽⁷⁾.

⁷Recorde que $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$, são as n colunas da matriz identidade I_n .

Demonstração do teorema do slide 80

Vamos provar o resultado para $n = 2$. A prova para n arbitrário é análoga.
Começemos por observar que

$$A = A I_2 = A [e_1 \ e_2] = [A e_1 \ A e_2],$$

isto é, $A e_1$ e $A e_2$ correspondem à 1ª e à 2ª colunas de A , respetivamente.

Pela aditividade e homogeneidade de T , tem-se por um lado,

$$T(x_1, x_2) = T(x_1(1, 0) + x_2(0, 1)) = T(x_1 e_1) + T(x_2 e_2) = x_1 T(e_1) + x_2 T(e_2).$$

Por outro lado, tem-se para qualquer matriz $A_{m \times 2}$,

$$\begin{aligned} T_A(x_1, x_2) &= A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A \left(x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= x_1 A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 A e_1 + x_2 A e_2. \end{aligned}$$

Finalmente, considerando $A = [T(e_1) \ T(e_2)]$, obtém-se pela observação inicial, $T(e_1) = A e_1$ e $T(e_2) = A e_2$, donde resulta das relações anteriores, $T(x_1, x_2) = T_A(x_1, x_2)$, para todo o $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $T = T_A$. $\square$

Matriz canónica de uma transformação linear - exemplo

Consideremos a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_3).$$

Vamos determinar a matriz canónica desta transformação. Tem-se,

$$\begin{aligned} T(e_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 1), \\ T(e_2) &= T(0, 1, 0) = (1, 0), \\ T(e_3) &= T(0, 0, 1) = (1, -1). \end{aligned}$$

Logo a matriz canónica de T é

$$A = [T(e_1) \ T(e_2) \ T(e_3)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

e podemos escrever $T(x)$ como a transformação $T_A(x) = Ax$ (verifique).

Imagem por uma transformação linear do quadrado unitário

Consideremos uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e seja Q o quadrado unitário definido pelos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$.

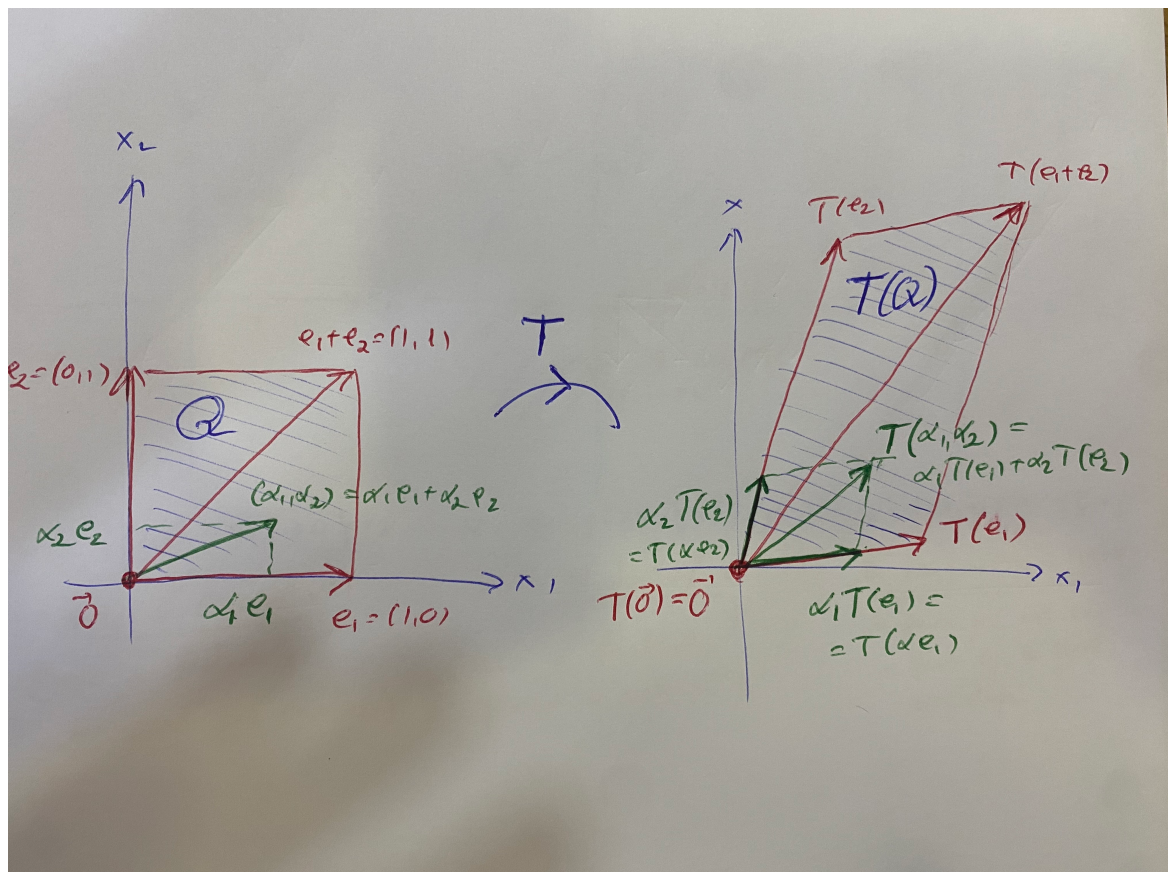
Tem-se:

- ▶ Qualquer vetor $u \in Q$ é da forma $u = (\alpha_1, \alpha_2)$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1]$, que se pode escrever como $u = \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$.
- ▶ Aplicando T ao vetor u obtém-se por linearidade,

$$T(u) = T(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = \alpha_1 T(e_1) + \alpha_2 T(e_2).$$

A relação anterior implica, em particular, que a **imagem por T do quadrado unitário Q é o paralelogramo definido pelas imagens $T(e_1)$ e $T(e_2)$** , isto é, **definido pelas colunas da matriz canónica de T** .

Ilustração do slide anterior



Composição de transformações lineares (não sai)

Dadas matrizes encadeadas $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$ tem-se, para todo o $x \in \mathbb{R}^p$,

$$T_A(T_B(x)) = A(Bx) = (AB)x = T_{AB}(x),$$

ou seja, a composição das transformações definidas pelas matrizes encadeadas $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{T_A} \mathbb{R}^m,$$

é a transformação definida pelo produto $(AB)_{m \times p}$,

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{T_{AB}} \mathbb{R}^m,$$

o que permite interpretar o produto de matrizes em termos de composição de transformações lineares.

Inversa de uma transformação linear (não sai)

Uma transformação

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

diz-se **invertível** se existir uma transformação

$$S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tal que para todo o $x \in \mathbb{R}^n$ se tem,

$$T(S(x)) = x \quad \text{e} \quad S(T(x)) = x.$$

A transformação S quando existe é **única**, designa-se por **inversa** de T e denota-se T^{-1} . Pode-se provar o seguinte resultado.

Teorema

Uma transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível se e só se A é invertível e nessa altura a sua inversa é $T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$.
Em particular, a inversa é também linear.

Inversa de uma transformação linear - exemplo

Considerando $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, obtém-se a transformação linear,

$$T_A(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = (2x_1 + x_2, 3x_1 + 2x_2).$$

Como A é invertível com inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (verifique), resulta do teorema do slide anterior que a inversa de T_A vem dada por,

$$\begin{aligned} T_A^{-1}(x_1, x_2) = T_{A^{-1}}(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = (2x_1 - x_2, -3x_1 + 2x_2). \end{aligned}$$

De facto,

$$\begin{aligned} T_A(T_A^{-1}(x_1, x_2)) &= T_A(2x_1 - x_2, -3x_1 + 2x_2) \\ &= (2(2x_1 - x_2) + 1(-3x_1 + 2x_2), 3(2x_1 - x_2) + 2(-3x_1 + 2x_2)) \\ &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Mostra-se, analogamente, que $T_A^{-1}(T_A(x_1, x_2)) = (x_1, x_2)$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 8 mencionámos as seguintes 8 propriedades das operações, **adição de vetores de $\mathbb{R}^n$** e **produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar**, que decorrem imediatamente de propriedades análogas dos números reais.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (**comutativa**)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**associativa**)
3. $x + \vec{0} = x$ (**existência de el. neutro**)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (**existência de el. simétrico**)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (**distributiva...**)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (**distributiva...**)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (**compatibilidade dos produtos**)
8. $1x = x$ (**el. identidade da multiplicação por escalar**)

Estas 8 propriedades podem ser resumidas dizendo que $\mathbb{R}^n$ munido da **adição de vetores** e do **produto de vetores por escalares** é um **espaço vetorial**...

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Vamos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem adicionar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares sem sair de V , isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V .

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um **subespaço vetorial** de $\mathbb{R}^n$ se

- ▶ $V \neq \emptyset$
- ▶ V é **fechado para a adição**, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- ▶ V é **fechado para o produto por escalar**, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

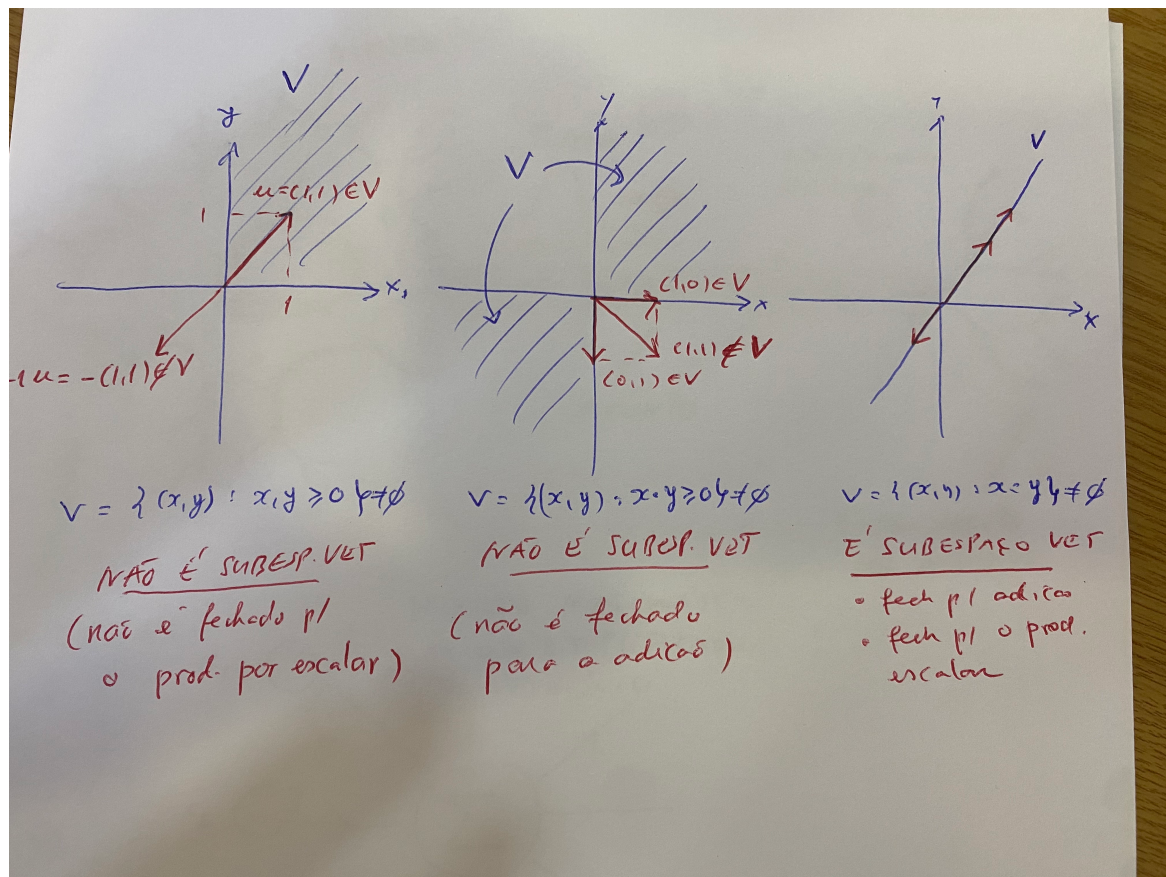
Observação

É imediato verificar que se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ ainda são válidas as propriedades (1), ..., (8) relativamente aos vetores de V , isto é, que V munido com as operações, **adição de vetores** e **multiplicação de vetores por escalares**, **herda a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$** .

Exemplos

- ▶ $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1º quadrante): **não vazio, fechado para adição mas não para o produto por escalar**
 $\Rightarrow$ **não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$** .
- ▶ $V = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ (1º e 3º quadrantes): **não vazio, fechado para o produto por escalar mas não para a adição**
 $\Rightarrow$ **não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$** .
- ▶ $V = \{(x, y) : x = y\}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares): **não vazio, fechado para a adição e para o produto por escalar**
 $\Rightarrow$ **é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$** .

Ilustração do slide anterior



Álgebra Linear 2025/26 - Pedro C Silva - Instituto Superior de Agronomia / ULisboa

91

Subespaço minimal e subespaço maximal

As 3 condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ do slide 89 são trivialmente verificadas quando $V = \{\vec{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$, obtendo-se os seguintes 2 subespaços vetoriais especiais de $\mathbb{R}^n$:

- ▶ $\{\vec{0}\}$ subespaço vetorial **minimal** (ou **trivial**).
- ▶ $\mathbb{R}^n$ subespaço vetorial **maximal**.

Condição **necessária** para ser subespaço vetorial. . .

Vamos agora estabelecer uma condição **necessária** (mas **não suficiente**) para um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definir um subespaço vetorial.

Teorema

Se V é **subespaço vetorial** de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

Demonstração: Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se:

- ▶ $V \neq \emptyset$, logo **existe um vetor** $v \in V$.
- ▶ V é **fechado para o produto por escalar**, logo $\lambda v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- ▶ Considerando, em particular, $\lambda = 0$, conclui-se que $0v = \vec{0} \in V$ como se pretendia. $\square$

Exemplo

$V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ **não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$** , pois $(0, 0) \notin V$ ($0^2 + 0^2 \neq 1$). **O que representa geometricamente V ?**

Espaço nulo de uma matriz

O seguinte conceito introduz o primeiro dos subespaços vetoriais fundamentais associados a matrizes que vamos considerar.

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se **espaço nulo de A** e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- ▶ O espaço nulo de A corresponde ao CS do sistema linear $Ax = \vec{0}$, dito **homogéneo**, em que o vetor dos termos constantes é o **vetor nulo**.
- ▶ Um sistema homogéneo **nunca é impossível** uma vez que possui sempre a solução trivial $x = \vec{0}$ (pois $A\vec{0} = \vec{0}$). Em particular $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.
- ▶ Para calcularmos $\mathcal{N}(A)$ temos que resolver o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é, temos que **reduzir a matriz ampliada** $[A|\vec{0}]$ ⁽⁸⁾.

⁸O vetor dos termos constantes pode ser omitido, uma vez que é sempre nulo ao longo do método de Gauss.

Espaço nulo - exercícios na aula

Exercícios na aula

Determine os espaços nulos das seguintes matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Reduzindo a matriz ampliada do 1º exercício obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0, 1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma **reta** de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui **uma** variável livre), que passa na **origem** (porque o sistema é **homogéneo**) com vetor diretor **$v = (0, 1, 1)$** .

Espaço nulo - exercícios na aula (cont.)

Consideremos agora a matriz do 2º exercício, $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$.

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$[A | \vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array} \right] = [A' | \vec{0}].$$

Uma vez que **todas as colunas de A' têm pivot** o sistema $Ax = \vec{0}$ é **determinado** e portanto possui apenas a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0, 0)\}$.

- Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, **$\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$** .

Em geral tem-se o seguinte.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

$$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0} \text{ é determinado} \Leftrightarrow \text{car}(A) = n^\circ \text{ colunas de } A.$$

O espaço nulo é subespaço vetorial. . .

Teorema

Para toda a matriz A do tipo $m \times n$, $\mathcal{N}(A)$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Tem-se:

- ▶ $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ como vimos no slide 94.
- ▶ $\mathcal{N}(A)$ fechado para a adição: se $u, v \in \mathcal{N}(A)$ então u e v são soluções de $Ax = \vec{0}$, isto é, $Au = Av = \vec{0}$ e portanto $A(u + v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que significa que $u + v$ é também solução de $Ax = \vec{0}$. Logo $u + v \in \mathcal{N}(A)$.
- ▶ $\mathcal{N}(A)$ fechado para o produto por escalar fica como exercício.

Logo é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ pois verifica 3 condições do slide 89. $\square$

Consequências

Conjuntos definidos por equações lineares homogéneas

Um conjunto V definido por equações lineares **homogéneas**, isto é, com termo independente **nulo**, define um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ onde n é o número de variáveis, pois corresponde ao espaço nulo da matriz dos coeficientes desse sistema que possui n colunas.

- ▶ Por exemplo, o conjunto V abaixo

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ pois pode ser definido como o espaço nulo

$$V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Observação

Se alguma das equações lineares que definem V não for homogénea, V não é um subespaço vetorial porque não contém o vetor nulo (origem).

- ▶ Por exemplo, o plano V de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação não homogénea $x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, não é subespaço vetorial porque não passa na origem.

Possíveis subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Pode-se provar que os subespaços vetoriais são de um dos seguintes tipos:

- ▶ Subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$):

$\{\vec{0}\}$, retas que passam na origem, $\mathbb{R}^2$.

- ▶ Subespaços vetoriais do espaço ($\mathbb{R}^3$):

$\{\vec{0}\}$, retas e planos que passam na origem, $\mathbb{R}^3$.

- ▶ Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$:

$\{\vec{0}\}$, retas, ... e hiperplanos que passam na origem, $\mathbb{R}^n$.

(um **hiperplano** é um conjunto definido por uma equação linear do tipo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, com os coeficientes $a_1, \dots, a_n$, não todos nulos.)

Combinação linear de vetores

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** (CL) de $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ chamam-se **coeficientes** da combinação linear.

Por outras palavras, b é CL de $v_1, \dots, v_n$ se puder ser obtido como **soma de múltiplos desses vetores**.