

Base para o espaço nulo de uma matriz - algoritmo

Algoritmo

Input: Matriz A do tipo $m \times n$.

Objectivo: Base para $\mathcal{N}(A)$.

- ▶ Resolver o sistema $Ax = \vec{0}$ aplicando o método de Gauss a $[A | \vec{0}]$.
Seja k o número de variáveis livres do sistema.
- ▶ Se $k = 0$, isto é, se não há variáveis livres então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
- ▶ Se $k > 0$, associamos a cada variável livre a solução de $Ax = \vec{0}$ em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.

O conjunto das k soluções de $Ax = \vec{0}$ obtidas deste modo constitui uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular,

$$\dim \mathcal{N}(A) = n^{\circ} \text{ de variáveis livres} = n - \text{car}(A)$$

Base para espaço nulo de uma matriz - exercício 2

Exercício na aula

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$. Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Um resultado auxiliar :)

Observação

Se w é CL de vetores u e v e $V = \langle u, v, w \rangle$ então $V = \langle u, v \rangle$, isto é, w é **redundante** no sentido em que **pode ser retirado do conjunto de geradores de V mantendo V !**

Vejamos esta propriedade no caso em que $w = u + v$ para simplificar a notação.

Se $b \in \langle u, v \rangle$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $b = \alpha u + \beta v = \alpha u + \beta v + 0 w$ o que mostra que $b \in \langle u, v, w \rangle$. Logo $\langle u, v \rangle \subset \langle u, v, w \rangle$.

Reciprocamente, se $b \in \langle u, v, w \rangle$ existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $b = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Como $w = u + v$ tem-se,

$$b = \alpha u + \beta v + \gamma w = \alpha u + \beta v + \gamma(u + v) = (\alpha + \gamma)u + (\beta + \gamma)v.$$

Logo $b \in \langle u, v \rangle$ e portanto $\langle u, v, w \rangle \subset \langle u, v \rangle$. Como já vimos que $\langle u, v \rangle \subset \langle u, v, w \rangle$ conclui-se que $V = \langle u, v, w \rangle = \langle u, v \rangle$.

Usando argumentos semelhantes pode-se provar um resultado mais geral.

Lema

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ tais que v_j é CL dos restantes vetores para algum j . Tem-se

$$\langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{j-1}, \cancel{v_j}, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle,$$

isto é, v_j pode ser removido do conjunto de geradores mantendo o espaço gerado.

Base para espaço gerado / espaço das colunas - exemplo

Vejamos como é que o resultado anterior nos permite obter bases para o espaço gerado/espaço das colunas, no caso da matriz do exercício do slide 127.

Consideremos $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 2, -1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$ e $v_4 = (4, 2, -3)$. Aplicando a fase descendente do método de Gauss obtém-se,

$$A = [v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

Daqui resulta que v_4 é CL de v_1, v_2 e v_3 (uma vez que $[v_1 \ v_2 \ v_3 \mid v_4]$ é possível) e que v_3 é CL de v_1 e v_2 (porque $[v_1 \ v_2 \mid v_3]$ é também possível). Logo, pelo lema do slide anterior tem-se:

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, \cancel{v_4} \rangle = \langle v_1, v_2, \cancel{v_3} \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Além disso, como o conjunto de geradores $\{v_1, v_2\}$ está associado às colunas com *pivot* na matriz em escada A' , é linearmente independente. Logo

- ▶ o conjunto dos vetores $\{v_1, v_2\}$ associados às colunas com *pivot* em A' define uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

E em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = n^\circ$ de vetores da base = n° de pivots em $A' = 2$.

Caso geral

- ▶ Consideremos $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n] \rightarrow A'$ com A' em escada. Pode-se mostrar usando o Lema do slide 132 que as colunas de A que estão associadas às colunas sem pivot em A' são **redundantes**, no sentido em que se tem,

$$C(A) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \langle v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k} \rangle,$$

onde $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ denotam as colunas de A associadas às colunas com pivot em A' .

- ▶ Por outro lado, $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$ é linearmente independente porque é constituído por vetores associados a colunas com pivot na matriz em escada A' .
- ▶ Das considerações anteriores resulta que o conjunto das colunas de A que correspondem a colunas com *pivot* na matriz em escada A' , $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}\}$, define uma **base de** $C(A) = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$.
- ▶ Tem-se portanto algoritmo do próximo slide.

Base para o espaço das colunas/espço gerado - algoritmo

Algoritmo

Input: $A = [v_1 \ \cdots \ v_n]$ com $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

Objectivo: Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$.

- ▶ Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A :
 $A \rightarrow \cdots \rightarrow A'$ com A' escada.
- ▶ O subconjunto das **colunas de A** que correspondem às colunas **com pivot em A'** constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$,
contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \dots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\dim \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \text{car}(A).$$

Obs: a **característica** de uma matriz A é muitas vezes definida como **$\dim \mathcal{C}(A)$** .

Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- ▶ Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A . Pelos algoritmos dos slides 130 e 135 tem-se:
 - ▶ $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}(A)$ (n° de colunas sem pivot em A').
 - ▶ $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$ (n° de colunas com pivot em A').
- ▶ Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A .

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.$$

Voltando-se ao exemplo do slide 127 tem-se pelos cálculos dos slides 128 e 133,

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = 2 + 2 = 4 = n^\circ \text{ de colunas de } A.$$

Vetor pertence ao espaço nulo / espaço das colunas de uma matriz

Recordatória

Dada uma matriz $A_{m \times n}$ tem-se por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax = \vec{0} \} \subset \mathbb{R}^n$$

$$\mathcal{C}(A) = \{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \} \subset \mathbb{R}^m.$$

Logo se $u \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se:

$$\blacktriangleright u \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Au = \vec{0}.$$

$$\blacktriangleright b \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow Ax = b \text{ é possível.} \Leftrightarrow [A \mid b] \text{ é possível.}$$

Vetor pertence ao espaço nulo / das colunas de uma matriz - exemplo

Exemplo

Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$.

► Vejamos que $u = (-2, 1, 0, 1) \in \mathcal{N}(A)$. De facto,

$$Au = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{0}.$$

► Vejamos que $b = (1, -1, 5) \in \mathcal{C}(A)$. Aplicando o método de Gauss,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|b'],$$

conclui-se que $Ax = b$ é um sistema possível. Logo $b \in \mathcal{C}(A)$.

Critério para definir base de um subespaço vetorial

- ▶ Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^m$ (cuja dimensão é m) são os conjuntos linearmente independentes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$ (conjuntos l.i. de vetores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade máxima)
- ▶ Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial V cuja dimensão se conhece!

Teorema

As bases de um subespaço vetorial V de dimensão $k > 0$ são os conjuntos linearmente independentes formados por k vetores de V ⁽¹⁵⁾.

Nos exercícios podemos aplicar o teorema anterior com a seguinte formulação.

Teorema (Critério para definir base de V)

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \dots, v_k$, k vetores de $\mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base de V se e só se verificar as seguintes 3 condições:

- ▶ $k = \dim V$.
- ▶ $v_1, \dots, v_k \in V$.
- ▶ $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente.

¹⁵Conjuntos l.i. de vetores de V de cardinalidade máxima.

Critério para definir base de um subespaço vetorial - exercício

Exercício na aula

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e a matriz do exemplo do slide 137,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Pelo critério do slide 139 basta verificar as seguintes condições:

- ▶ $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ (n° de vetores do conjunto). De facto, a matriz em escada A' obtida a partir de A tem 2 colunas sem pivot - **confirme**.
- ▶ $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$. De facto, tem-se $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ - **confirme**.
- ▶ $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente. De facto, v_1 e v_2 são não colineares.

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Subespaço vetorial e dimensão

- ▶ O conhecimento da **dimensão de um subespaço vetorial** permite **conhecer o tipo de conjunto** que esse subespaço vetorial define.
- ▶ Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se o seguinte.

	dimensão do subespaço	tipo de subespaço vetorial
$\mathbb{R}^2$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	plano que passa na origem
	3	$\mathbb{R}^3$

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços **minimal** e **maximal** de $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário, em função das suas dimensões:

- ▶ $V = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim V = 0.$
- ▶ $V = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n.$

Casos especiais do espaço nulo e do espaço das colunas

Consideremos uma matriz $A_{m \times n} \xrightarrow{\text{Gauss}} \cdots \rightarrow A'$ com A' em escada. Pelos resultados dos slides 141, 128 e 133 tem-se o seguinte:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} &\Leftrightarrow \dim \mathcal{N}(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Não há variáveis livres no sistema } Ax = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \text{Todas as colunas de } A' \text{ têm pivot} \\ &\Leftrightarrow \text{car}(A) = n \quad (\text{n}^\circ \text{ de colunas de } A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m &\Leftrightarrow \dim \mathcal{C}(A) = m \\ &\Leftrightarrow \text{Todas as linhas de } A' \text{ têm pivot} \\ &\Leftrightarrow \text{Não há linhas nulas em } A' \\ &\Leftrightarrow \text{car}(A) = m \quad (\text{n}^\circ \text{ de linhas de } A).\end{aligned}$$

Têm-se ainda os casos “menos interessantes” $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}(A) = \{\vec{0}\}$, que apenas ocorrem quando A é a matriz nula (justifique).