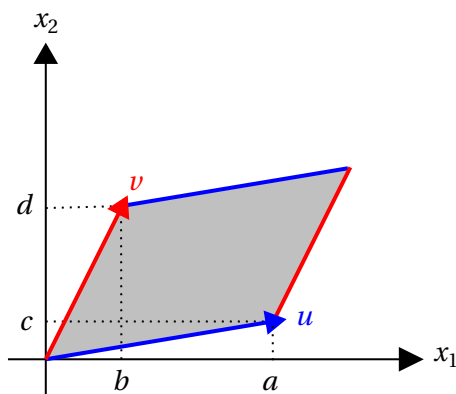


Capítulo 4

Determinantes

Exercício 44. Considere o paralelogramo definido pelos vetores $u = (a, c)$ e $v = (b, d)$ da figura abaixo. Mostre, sem usar o conceito de determinante, que a sua área vem dada por $ad - bc$.



Exercício 45. Sabendo que o volume da esfera de raio 1 é $\frac{4}{3}\pi$ deduza o volume da esfera de raio $r > 0$.

Exercícios 46.

1. Calcule o determinante de cada uma das seguintes matrizes e interprete geometricamente o resultado obtido nas alíneas a), b) e c).

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} & \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 1 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \text{c)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \\ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{e)} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} & \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{a)} 1 & \text{b)} 18 & \text{c)} 0 \end{array}$$

$$\text{d)} 11 \quad \text{e)} 65 \quad \text{f)} 42$$

Exercícios 47. Prove os seguintes resultados para matrizes 4×4 .

1. O determinante de uma matriz triangular superior é o produto dos elementos da diagonal principal da matriz.
2. Uma matriz com linhas ou colunas de zeros tem determinante nulo.
3. Uma matriz com linhas ou colunas proporcionais tem determinante nulo.

Exercício 48. [Exercício 16.4 (c) revisitado] Usando o conceito de determinante discuta, em função de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear do conjunto de vetores $\{0, \gamma, -\beta\}, (-\gamma, 0, \alpha), (\beta, -\alpha, 0)\}$.

É l.d. $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Exercício 49. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indique os valores de α para os quais:

- a) A é invertível.
- b) $\det(2A^{-1}) = 1$.

a) $\alpha \neq 0$ b) $\alpha = 2$

Capítulo 5

Valores e vetores próprios

CONCEITOS DE VETOR PRÓPRIO E VALOR PRÓPRIO

Exercício 50.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Verifique que $(1, 5, 10)$ é vetor próprio.

De facto, $A \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ (com valor próprio $\lambda = 6$).

b) Verifique que 1 é valor próprio.

De facto, $p_A(1) = \det(A - I) = 0$ pois tem uma coluna de zeros.

Exercício 51. Verifique que -1 é valor próprio da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e

determine os vetores próprios associados a -1 .

De facto, $p_A(-1) = \det(A - (-1)I) = \det(A + I) = 0$. Os vetores próprios de A associados ao valor próprio $\lambda = -1$ são os múltiplos não nulos do vetor $(0, 1, 1)$.

Exercício 52. Determine os valores próprios e correspondentes vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes, indicando em cada caso, uma base e a dimensão do subespaço próprio associado a cada valor próprio.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A dimensão do subespaço próprio $E(\lambda)$ associado a um valor próprio λ é $m.g.(\lambda)$ e os vetores próprios associados a λ são os vetores não nulos de $E(\lambda)$, isto é, os vetores não nulos dos subespaços vetoriais gerados pelas respectivas bases, indicadas a seguir:

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	1	1	$\{(-1, 1)\}$
2	1	1	$\{(1, 0)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$-i$	1	1	$\{(-i, 1)\}$
i	1	1	$\{(i, 1)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	3	1	$\{(0, 0, 1)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
1	2	1	$\{(1, 0, 0)\}$
6	1	1	$\{(1, 5, 10)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
$1-2\sqrt{2}$	1	1	$\{(\sqrt{2}, -1, 1)\}$
1	1	1	$\{(0, 1, 1)\}$
$1+2\sqrt{2}$	1	1	$\{(-\sqrt{2}, -1, 1)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
2	2	2	$\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
4	1	1	$\{(1, 1, 0)\}$

λ	$m.a.(\lambda)$	$m.g.(\lambda)$	base de $E(\lambda)$
-2	1	1	$\{(0, 0, 1, 0)\}$
1	2	1	$\{(1, 0, 0, 0)\}$
2	1	1	$\{(0, 0, 0, 1)\}$

Exercício 53. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$.

- a) Determine os valores do parâmetro a para os quais a matriz A admite o valor próprio zero.

$a = 1$

- b) Para cada um dos valores de a obtidos na alínea anterior calcule os valores próprios de A e identifique os correspondentes vetores próprios.

Para $a = 1$ os valores próprios de A são $\lambda = 0$ com $m.a.(0) = 1$ e $\lambda = 2$ com $m.a.(2) = 2$. Os vetores próprios associados a $\lambda = 0$ são os múltiplos não nulos de $(-1, 1, 0)$ e vetores próprios associados a $\lambda = 2$ são os múltiplos não nulos de $(0, 1, 1)$.

- c) Discuta, em função do parâmetro a , a invertibilidade da matriz A .

Para $a \neq 1$ é invertível e para $a = 1$ é singular

Exercício 54. Seja v um vetor próprio associado ao valor próprio λ de uma matriz A .

- a) Mostre que, para todo o real α , v é um vetor próprio da matriz $A - \alpha I$ e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é $\lambda - \alpha$.

- b) Mostre que, para todo o inteiro n , v é vetor próprio da matriz A^n e indique o valor próprio associado.

O valor próprio associado é λ^n .

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Exercício 55. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Calcule os valores próprios de A e as respetivas multiplicidades algébricas.

Admite os valores próprios 0 e 1 com multiplicidades algébricas 1 e 2, respetivamente.

- b) Indique um vetor próprio de A .

Por exemplo, $(1, 0, 0)$ é um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 0$.

- d) Será que existe uma matriz quadrada P , de ordem 3, invertível tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal? Justifique.

Não, porque $m.g.(1) < m.a.(1)$ (verifique).

Exercício 56. Indique, justificando, quais das matrizes do exercício 52 são diagonalizáveis.

A sim, B sim, C não, D não, E sim, F sim, G não.

Exercício 57. Determine uma matriz de diagonalização de cada uma das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A: P = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tendo-se } P^{-1}AP = \text{diag}(-4, 1, 3).$$

$$B: P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tendo-se } P^{-1}BP = \text{diag}(0, 2, 2).$$

$$C: P = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ tendo-se } P^{-1}CP = \text{diag}(-4, 1, 6).$$

Exercício 58. Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

- a) Verifique que o polinómio característico de A é $p(\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - \frac{1}{4})$.
- b) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz de diagonalização para A .

A é diagonalizável pois admite 3 valores próprios distintos e uma matriz de di-

agonalização para A é $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Exercício 59. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3 que admite o valor próprio 1 com multiplicidade algébrica 2 e os vetores próprios $(1, 0, -1)$, $(0, 1, 1)$ associados ao valor próprio 1.

- a) Justifique que A é diagonalizável.

Sugestão: comece por mostrar que $m.g.(1) = \dim E(1) = 2 \dots$

- b) Determine A assumindo que $(-1, 1, 0)$ é vetor próprio de A associado ao valor próprio 2.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

POTÊNCIA DE MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS

Exercício 60. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -18 & -10 \end{bmatrix}$.

- a) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz de diagonalização para A .

Uma possível matriz de diagonalização é $P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(2, -1)$.

- b) Calcule A^{10} .

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 4093 & 2046 \\ -6138 & -3068 \end{bmatrix}.$$

Exercício 61. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

- a) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz de diagonalização para A .

Uma possível matriz de diagonalização é $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^{-1}AP = \text{diag}(-\frac{1}{5}, 1)$.

- b) Prove que $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

MATRIZES ORTOGONALMENTE DIAGONALIZÁVEIS

Exercício 62. Considere $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Para $a = 2$ e $b = 1$, indique uma matriz de diagonalização.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ tendo-se } P^{-1}AP = \text{diag}(0, 3).$$

b) Para que valores de a e b a matriz A é ortogonalmente diagonalizável?

$$a = 1 \text{ e } b \neq 1.$$

Exercício 63. Justifique que $A = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é ortogonalmente diagonalizável e indique uma matriz ortogonal de diagonalização.

A é simétrica.

Uma matriz de diagonalização é $P = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, tendo-se $P^T AP = PAP = \text{diag}(0, 17)$.

Exercício 64. Diagonalize ortogonalmente $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

$$P^T AP = \text{diag}(2, 2, 8) \text{ com } P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Exercício 65.

a) Indique quais das matrizes do exercício 52 são ortogonalmente diagonalizáveis e determine matrizes ortogonais de diagonalização para essas matrizes.

Matrizes E e F (porque são simétricas), tendo-se

$$P^T EP = \text{diag}(1 - 2\sqrt{2}, 1, 1 + 2\sqrt{2}) \text{ com } P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$Q^T FQ = \text{diag}(2, 2, 4) \text{ com } Q = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Utilizando o teorema de decomposição espectral escreva as matrizes indicadas na alínea anterior como soma de matrizes de característica um.

Escrevendo as matrizes de diagonalização determinadas na alínea anterior como

$$P = [u_1 \ u_2 \ u_3], \quad Q = [v_1 \ v_2 \ v_3],$$

e designando por $\lambda_1 = 1 - 2\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 1 + 2\sqrt{2}$ os correspondentes valores próprios de E e por $\mu_1 = \mu_2 = 2$ e $\mu_3 = 4$ os valores próprios de F obtêm-se as seguintes decomposições:

$$\begin{aligned} E &= \lambda_1 u_1 u_1^T + \lambda_2 u_2 u_2^T + \lambda_3 u_3 u_3^T \\ &= (1 - 2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + (1 + 2\sqrt{2}) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \\ F &= \mu_1 v_1 v_1^T + \mu_2 v_2 v_2^T + \mu_3 v_3 v_3^T \\ &= 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício 66. Prove os seguintes resultados.

- Matrizes ortogonalmente diagonalizáveis são simétricas.
- Se λ é um valor próprio real não nulo de uma matriz A e v um vetor próprio associado a λ , então λ tem o sinal de $v^T A v$.

Capítulo 6

Introdução à programação linear

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM PL

Exercícios 67.

1. Um avião de combate a incêndios florestais pode transportar dois tipos de produtos, P1 e P2. Uma tonelada de P1 ocupa 0.5 m^3 , permite combater uma área de incêndio de 1.5 ha e custa 2000 Euros. Uma tonelada de P2 ocupa 2 m^3 , permite combater uma área de 4 ha e custa 3000 €. O peso e espaço reservados para o transporte desses produtos não pode ultrapassar os 1.5 toneladas e 1.0 m^3 . Pretende-se determinar a quantidade a transportar de cada um dos tipos de produto de modo a combater incêndios numa área de pelo menos 2.5 ha e minimizando os custos.

- a) Formule linearmente o problema, indicando os signicados das variáveis intervenientes.

Solução: sejam x_1 e x_2 as variáveis que representam a quantidade a transportar, em toneladas, dos produtos P1 e P2, respectivamente. O problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \max & 2000x_1 + 3000x_2 \\ \text{s.a} & x_1 + x_2 \leq 1.5 \\ & 0.5x_1 + 2x_2 \leq 1 \\ & 1.5x_1 + 4x_2 \geq 2.5 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

- b) Mostre que 1 tonelada de P1 e 0.25 toneladas de P2 é uma solução admissível e determine a área de incêndio que esta opção permite combater.

Solução: a solução indicada satisfaz todas as restrições funcionais e de sinal (verifique), permitindo combater uma área de 2.5 ha.

2. Um distribuidor de cafés vai misturar numa certa proporção os grãos provenientes do Brasil, Quênia e Jamaica para fazer dois lotes de café, A e B. A composição e o preço de venda de cada um dos lotes, assim como a quantidade existente em armazém de cada um dos tipos de café estão indicados no quadro seguinte.

	lote A	lote B	quant. disponível (kg)
Brasil	0.25	0.25	100
Quênia	0.75	0.25	150
Jamaica	0.0	0.5	175
preço de venda (Euros/Kg)	3.5	5.0	

Sabendo que todo o café será vendido, pretende-se determinar a quantidade de cada um dos lotes a que corresponde a maior receita bruta.

- a) Formule o problema em termos de programação linear, atribuindo significado às variáveis.

Solução: O problema pode ser formulado como

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 3.5x_1 + 5.0x_2 \\
 \text{s.a} \quad & 0.25x_1 + 0.25x_2 \leq 100 \\
 & 0.75x_1 + 0.25x_2 \leq 150 \\
 & 0.5x_2 \leq 175 \\
 & x_1, x_2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

em que x_1 e x_2 representam a quantidade, em Kg, de café de lote A e B, respectivamente.

- b) Determine as quantidades a produzir de cada um dos lotes de modo a maximizar a receita bruta.

Solução: Devem ser produzidos 50 Kg de café do lote A e 350 Kg de café do lote B, que originam uma receita bruta máxima de 1925 Euros.

Exercícios 68.

1. Considere o problema

$$\begin{aligned}
 \text{maximizar} \quad & 20x_1 + 30x_2 \\
 \text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 120 \\
 & x_1 \leq 60 \\
 & x_2 \leq 50 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Represente graficamente a região admissível e as soluções admissíveis a que correspondem valores da função objectivo iguais a 600.
- b) Indique uma solução óptima e o correspondente valor da função objectivo.

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ é a única solução óptima, sendo o correspondente valor da f.o. igual 2100.

- c) Se os coeficientes da função objectivo coincidissem e fossem positivos, quais seriam as soluções óptimas?

Solução: $x_1 = 60$, $x_2 = 30$ continuaria a ser a única solução óptima.

2. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \\ \text{sujeito a} & \begin{array}{ll} x_1 + 3x_2 & \leq 24 \\ x_1 + x_2 & \leq 10 \\ x_1 & \leq 8 \\ x_1, x_2 & \geq 0 \end{array} \end{array}$$

- a) Represente geometricamente a região admissível.

Nota: A região admissível do problema é o polígono de vértices $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(8, 2)$, $(3, 7)$ e $(0, 8)$.

- b) Determine e represente graficamente o conjunto das soluções admissíveis cujo valor da f.o. é 8.

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 600, 0 \leq x_1 \leq 8\}$$

- c) Indique uma solução óptima, o valor da função objectivo nesse ponto e as restrições *saturadas* (satisfeitas com igualdade).

Solução: $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ é a única solução óptima e o correspondente valor da função objectivo é 17. As restrições saturadas são a primeira e a segunda.

- d) Dê exemplo de outra função objectivo relativamente à qual se mantém óptima a solução que indicada na alínea anterior.

Solução: por exemplo, $z = x_1 + 3x_2$.

FORMA STANDARD E S.B.A.

Exercício 69. Uma fábrica tem que reduzir a emissão dos seus 3 principais poluentes atmosféricos: as partículas, os óxidos sulfúricos e os hidrocarbonetos, em pelo menos 72, 50 e 24 milhares de quilos por ano, respectivamente. Para esse efeito a fábrica vai modificar a chaminé, aumentando a altura e/ou a área dos filtros. Estas modificações permitem reduzir a emissão anual dos poluentes nos valores indicados na tabela seguinte (em milhares de quilos).

	Aumentar 1 m a altura da chaminé	Aumentar 1 m ² a área dos filtros
Partículas	9	18
Óxidos sulfúricos	10	10
Hidrocarbonetos	12	4

Os custos de aumentar 1 m a altura e 1 m² a área dos filtros da chaminé são, respectivamente, 10 e 7 mil €. A fábrica pretende determinar os valores dos aumentos da altura e da área dos filtros de modo a atingir o objectivo proposto com o menor custo possível.

- a) Formule linearmente o problema, atribuindo significado às variáveis.

Solução: $\min \quad 10x_h + 7x_A$
 $\text{s.a} \quad 9x_h + 18x_A \geq 72 \quad (P)$
 $10x_h + 10x_A \geq 50 \quad (O)$
 $12x_h + 4x_A \geq 24 \quad (H)$
 $x_h, x_A \geq 0$

em que x_h e x_A são, respectivamente, o número de m a aumentar a altura da chaminé e o número de m² a aumentar a área dos filtros.

- b) Represente graficamente a região admissível.

Nota: a região admissível é o polígono de vértices $A = (0, 6)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, $C = (2, 3)$ e $D = (8, 0)$.

- c) Determine uma solução óptima do problema. Qual é o custo associado a esta solução?

Solução: a solução óptima é única e ocorre no vértice $B = (\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$, que consiste em aumentar 0.5 m a altura da chaminé e 4.5 m² a área dos filtros, com um custo mínimo de 36500€.

d) Converta o problema à forma *standard*.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Solução: } \min & 10x_h + 7x_A & & \\
 \text{s.a} & 9x_h + 18x_A - f_P & = 72 & (P) \\
 & 10x_h + 10x_A - f_O & = 50 & (O) \\
 & 12x_h + 4x_A - f_H & = 24 & (H) \\
 & x_h, x_A, f_P, f_O, f_H & \geq 0 &
 \end{array}$$

e) Indique a s.b.a associada à solução ótima determinada na alínea c).

Solução: A correspondente solução básica admissível é

$$(x_h, x_A, f_P, f_O, f_H) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, 0, 0\right),$$

em que f_P, f_O, f_H são as variáveis de folga associadas às restrições (P), (O) e (H), respectivamente.

Exercício 70. Uma câmara municipal pretende rentabilizar um parque com 100 ha para zona florestal, reserva de caça e parque de campismo. Para a manutenção do parque dispõe anualmente de uma verba de 30000 Euros e de 20000 horas de trabalho. O quadro seguinte indica o capital e a horas de trabalho necessários à manutenção anual de cada hectare, consoante o tipo de ocupação de solo.

	capital (Euros)	horas de trabalho
floresta	100	100
caça	300	150
campismo	400	500

Prevê-se um lucro anual de 40, 80 e 60 Euros por cada hectare de terreno destinado à área florestal, reserva de caça e parque de campismo, respectivamente. Pretende determinar-se a área a destinar a cada tipo de ocupação de solo por forma a maximizar o lucro.

a) Formule linearmente o problema atribuindo significado às variáveis.

$$\begin{array}{llll}
 \text{Solução: } \max & 40x + 80y + 60z & & \\
 \text{s. a} & x + y + z & \leq & 100 \\
 & 100x + 300y + 400z & \leq & 30000 \\
 & 100x + 150y + 500z & \leq & 20000 \\
 & x, y, z & \geq & 0
 \end{array}$$

em que x, y e z representam, respectivamente, os hectares destinados à área florestal, à reserva de caça e ao parque de campismo.

b) Converta a formulação anterior à forma *standard*.

$$\begin{array}{llll} \text{Solução: } \max & 40x + 80y + 60z & & \\ \text{s. a} & x + y + z + f_1 & = & 100 \\ & x + 3y + 4z + f_2 & = & 300 \\ & x + 1.5y + 5z + f_3 & = & 200 \\ & x, y, z, f_1, f_2, f_3 & \geq & 0; \end{array}$$

c) Determine uma solução que maximize o lucro quando 40 ha de terreno são destinados a reserva de caça.

Solução: utilizar 40 ha do terreno para floresta e ocupar 20 ha para parque de campismo, proporciona um lucro máximo de 6000 Euros.

d) Utilize o suplemento de otimização do Solver, incluído no editor de folha de cálculo Excel™ para determinar uma solução do problema.

Uma implementação usando solver do Excel pode ser descarregada [aqui](#).

e) Averigue se a solução ótima determinada na alínea anterior corresponde a um vértice da região admissível.

A solução ótima devolvida pelo solver é $x = (0, 100, 0)$ que corresponde a destinar toda a área disponível à caça, gerando um lucro de 8000 €. O correspondente vetor ampliado com as folgas é $\bar{x} = (0, 100, 0, 0, 0, 50)$. Este vetor satisfaz as 4 condições do slide 224 (verifique), pelo que define uma s.b.a do problema na forma *standard*. Logo x é um vértice da região admissível do problema original.

Exercício 71. Um estabelecimento comercial pretende obter o máximo lucro disponibilizando 150 m² para armazenar, durante 3 meses, materiais dos tipos A, B, C e D. O processo de armazenagem terá que decorrer em não mais do que 10 horas e o compromisso de armazenar pelo menos 2 toneladas do material A terá que ser respeitado. Cada tonelada de material dos tipos A, B, C e D requer, para ser armazenado 1, 4, 1 e 2 horas e ocupa 15, 16, 20 e 30 m², sendo cobrados 200, 300, 400 e 700 €, respectivamente.

a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{array}{ll} \text{Solução: } \max & 200a + 300b + 400c + 700d \\ \text{s.a} & a + 4b + c + 2d \leq 10 \\ & 15a + 16b + 20c + 30d \leq 150 \\ & a \geq 2 \\ & a, b, c, d \geq 0 \end{array}$$

em que a , b , c e d são as quantidades, em toneladas, dos materiais dos tipos A, B, C e D, respectivamente, a armazenar.

b) Converta a formulação anterior à forma *standard* e atribua significado às variáveis de folga.

Solução: $\max \quad 200a + 300b + 400c + 700d$
 $\text{s.a} \quad a + 4b + c + 2d + t = 10$
 $15a + 16b + 20c + 30d + e = 150$
 $a - a' = 2$
 $a, b, c, d, t, e, a' \geq 0$

As variáveis de folga t , e e a' são os valores das diferenças entre o tempo de armazenagem, a área total ocupada e as toneladas de material do tipo A definidos por cada solução admissível e os membros direitos das restrições correspondentes.

- c) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 3 de C e 2 de D, é admissível mas que não corresponde a um vértice da região admissível.

Solução: para $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2$ tem-se
 $a + 4b + c + 2d = 9 \leq 10$
 $15a + 16b + 20c + 30d = 150 \leq 150$
 $a = 2 \geq 2$
 $a, b, c, d \geq 0$

que mostra que $(2, 0, 3, 2)$ é solução admissível. Na forma *standard* a solução correspondente é $a = 2, b = 0, c = 3, d = 2, t = 1, e = 0, a' = 0$, com mais do que 3 variáveis não nulas, o que permite concluir que $(2, 0, 3, 2, 1, 0, 0)$ não é sba e portanto que $(2, 0, 3, 2)$ não é vértice.

- d) Mostre que a opção que consiste em armazenar 2 toneladas de A, 0 de B, 0 de C e 4 de D, corresponde a um vértice da região admissível.

Sugestão: Estudar e adaptar a resolução da alínea d) do exercício 72.

- e) Utilizando o suplemento de otimização Solver do ExcelTM, investigue se o vértice da alínea anterior corresponde a uma solução ótima do problema.

Sugestão: adaptar a implementação do exercício 70.

Exercício 72. Uma empresa de distribuição foi encarregue de abastecer 3 clientes com uma mercadoria existente nos armazéns A e B. O armazém A pode disponibilizar até 60 toneladas (t) dessa mercadoria e o armazém B até 30 t. O cliente 1 requereu exactamente 20 t. Os clientes 2 e 3 estão dispostos a receber qualquer quantidade da mercadoria, mas a empresa comprometeu-se apenas com o cliente 2 a fornecer-lhe pelo menos 50 t.

A tabela seguinte indica o lucro (em dezenas de euros) resultante da distribuição de uma tonelada de mercadoria de cada armazém para cada um dos clientes.

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	8	5	7
B	6	4	10

A empresa pretende determinar a quantidade de mercadoria a transportar de cada armazém para cada cliente de modo a obter o maior lucro.

- a) Formule o problema em termos de Programação linear, atribuindo significado às variáveis.

Solução:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 8x_{A1} + 5x_{A2} + 7x_{A3} + 6x_{B1} + 4x_{B2} + 10x_{B3} \\
 \text{s.a} & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 60 \\
 & x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 30 \\
 & x_{A1} + x_{B1} = 20 \\
 & x_{A2} + x_{B2} \geq 50 \\
 & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3} \geq 0
 \end{array}$$

em que x_{Ki} é a quantidade, em toneladas, de mercadoria a ser transportada do armazém K ($K = A, B$) para o cliente i ($i = 1, 2, 3$).

- b) Verifique que é admissível a opção descrita na tabela seguinte

Armazém	Cliente		
	1	2	3
A	20	40	0
B	0	10	20

Qual é o lucro resultante desta opção?

Solução: a opção $x_{A1} = 20, x_{A2} = 40, x_{A3} = 0, x_{B1} = 0, x_{B2} = 10, x_{B3} = 20$ é solução admissível pois satisfaz todas as restrições da formulação da alínea a). O lucro resultante desta opção é 600 dezenas de euros.

- c) Converta à forma *standard* a formulação anterior.

Solução:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 8x_{A1} + 5x_{A2} + 7x_{A3} + 6x_{B1} + 4x_{B2} + 10x_{B3} \\
 \text{s.a} & x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + F_1 = 60 \\
 & x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + F_2 = 30 \\
 & x_{A1} + x_{B1} = 20 \\
 & x_{A2} + x_{B2} - F_3 = 50 \\
 & x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, F_1, F_2, F_3 \geq 0
 \end{array}$$

- d) Mostre que a opção da alínea b) corresponde a um vértice da região admissível do problema.

Solução: o sistema de equações que definem a região admissível do problema na forma *standard* é representado pela seguinte matriz ampliada $[A|b]$ seguinte,

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc|c} x_{A1} & x_{A2} & x_{A3} & x_{B1} & x_{B2} & x_{B3} & F_1 & F_2 & F_3 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 50 \end{array} \right].$$

Calculando os valores das variáveis de folga da solução de b),

$$x = (x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}) = (20, 40, 0, 0, 10, 20),$$

obtem-se $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, que origina o vetor ampliado,

$$\bar{x} = (x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, F_1, F_2, F_3) = (20, 40, 0, 0, 10, 20, 0, 0, 0).$$

Tem-se então que x é vértice de $\mathcal{R}$ se e só se $\bar{x}$ for s.b.a., isto é, se e só se verificar as 4 condições do slide 224:

1. Todas as componentes de $\bar{x}$ são não negativas, o que se verifica.
2. Número de componentes nulas de $\bar{x}$ é superior ou igual ao número de variáveis (contando com folgas) menos o número de restrições funcionais, o que se verifica: $5 \geq 9 - 4$.
3. $A\bar{x} = b$ (verifique).
4. O conjunto das colunas associadas às 4 variáveis não nulas de $\bar{x}$ é linearmente: considerando a matriz M formada por essas colunas,

$$M = \left[\begin{array}{cccc} x_{A1} & x_{A2} & x_{B2} & x_{B3} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

e aplicando o método de Gauss obtém-se uma matriz em escada M' cujas colunas têm todas *pivot* (verifique). Como o vetor $(20, 40, 0, 0, 10, 20, 0, 0, 0)$ verifica as 4 condições do slide 224, define uma s.b.a e portanto o vetor $x = (20, 40, 0, 0, 10, 20)$ corresponde a um vértice do poliedro definido pelas restrições da alínea a).

Exercício 73. Uma empresa decidiu iniciar a produção dos produtos P_1 e P_2 , dispondo para isso de mão-de-obra equivalente a 80 horas semanais. Semanalmente, cada tonelada de P_1 e P_2 dá um lucro de 12€ e 8€ e requer 5 e 2 horas de mão-de-obra, respectivamente. Sabe-se que a procura semanal do produto P_1 é não limitada, mas a de P_2 não ultrapassa as 30 toneladas. A empresa pretende determinar a quantidade a produzir semanalmente de cada produto, de forma a obter o lucro máximo.

- a) Formule o problema de programação linear, atribuindo significado às variáveis utilizadas.

$$\begin{aligned} \text{Solução: } \max \quad & 12p_1 + 8p_2 \\ \text{s.a} \quad & 5p_1 + 2p_2 \leq 80 \\ & p_2 \leq 30 \\ & p_1, p_2 \geq 0 \end{aligned}$$

em que p_1 e p_2 são, respectivamente, as toneladas de P_1 e P_2 a produzir semanalmente.

- b) Represente graficamente a região admissível.

Nota: a região admissível é polígono de vértices $A = (0, 0)$, $B = (0, 30)$, $C = (4, 30)$ e $D = (16, 0)$.

- c) Identifique uma solução ótima e a correspondente solução básica admissível.

Solução: C , que representa a opção de produzir semanalmente 4 toneladas de P_1 e 30 de P_2 , é solução ótima. A solução básica admissível correspondente é $(4, 30, 0, 0)$.

- d) Determine os valores que poderá assumir o lucro resultante da venda de cada tonelada de produto P_1 de forma a manter ótima a solução determinada na alínea anterior.

Solução: entre 0 e 20€.

Exercício 74. Considere o problema de programação linear,

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \\ \text{com} \quad & (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 \geq 3, \\ & x_1 - 2x_3 + x_4 \geq 2, \\ & x_1 + x_3 \leq 3, \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \}. \end{aligned}$$

- a) Estabeleça as restrições lineares que definem a região admissível $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^7$ do correspondente problema linear na forma *standard*.

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) : \\ & x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ & x_1 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 2 \\ & x_1 + x_3 + x_7 = 3 \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0\}.\end{aligned}$$

- b) Verifique que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathcal{P}$ e indique o valor da função objectivo em v .

Solução: Para vermos que $v = (2, 3, 0, 0)$ é vértice de $\mathcal{P}$ temos que ver que o ponto de $\mathcal{F}$ que lhe corresponde, $\bar{v} = (2, 3, 0, 0, 0, 0, 1)$, é solução básica admissível. Ora $\bar{v}$ é admissível pois as suas componentes são não negativas. Além disso, como a matriz dos coeficientes do sistema de equações que define $\mathcal{F}$ tem característica igual a 4 e o conjunto das colunas da matriz desse sistema que correspondem às componentes não nulas de $\bar{v}$ (colunas 1, 2 e 7) é linearmente independente (verifique), $\bar{v}$ é básica.

O valor da função objectivo correspondente ao vértice v é igual a 7.