

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Exame de Época Especial de Álgebra Linear

4 de fevereiro de 2026 - Duração: 2h30

Guarde **todos os equipamentos eletrônicos**, incluindo telemóveis, calculadoras e *smartwatches* na mala/mochila fechada ou coloque-os na secretária do docente.
Não é permitido escrever no enunciado para além do preenchimento do nome e número de aluno. O incumprimento das regras anteriores leva à **anulação da prova**.

Apresente os cálculos que efetuar e justifique todas as respostas.

Número:

Nome:

Cotação (não preencher)

1a)	1b)i	1b)ii	1c)	1d)i	1d)ii	2
1.5	0.5	0.75	1.25	1	2	1.5

3a)	3b)	3c)	4a)	4b)i	4b)ii	4b)iii	5	6a)	6b)	6c)	Total
1	1.25	2	1	1.5	1	0.5	1	0.5	0.5	1.25	20

Atenção: Os dados relativos às questões **1.**, **3.**, **4.** e **6.** encontram-se abaixo. No início da resolução de cada uma dessas questões, comece por copiar os dados que dizem respeito à questão para o caderno de teste.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 1 & 2\alpha + 1 \\ 1 & 0 & \alpha + 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Considere $V = \langle (1, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 3), (0, 1, -1, -2) \rangle$, e $b = (1, 2, 2, 5)$.

4. Considere $A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Considere o problema de programação linear $\mathcal{P}$ abaixo,

$$\begin{array}{ll} \min & z = x + 3y + 2z \\ \text{s. a} & 2x + 3y + z \leq 12 \\ & 3x + 2y - 3z \geq 6 \\ & x + 2z \leq 2 \\ & x, y, z \geq 0. \end{array}$$

(continua no verso)

- [7v] 1. a) Classifique o sistema $Ax = b$ para todos os valores de α e β .
 b) Indique os valores de α para os quais:
 i) $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
 ii) $\mathcal{N}(A)$ define uma reta em $\mathbb{R}^3$.
 c) Considere $\alpha = 1$ e determine a inversa de A .
 d) No que se segue assuma $\alpha = 2$.
 i) Escreva v_3 como combinação linear de v_1 e v_2 .
 ii) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\mathcal{C}(A)$.
- [1.5v] 2. Considere $u, v, b \in \mathbb{R}^n$, $V = \langle u, v \rangle$ e $p = \text{proj}_V(b)$. Justifique que $\|b - p\| \leq \|b - \alpha u - \beta v\|$ para todo o $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- [4.25v] 3. a) Determine uma base e a dimensão de V .
 b) Determine um vetor não nulo ortogonal a V .
 c) Determine $\text{proj}_V(b)$ e indique a distância de b a V .
- [4v] 4. a) Determine o(s) valor(es) de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais 1 é valor próprio de A .
 b) No que se segue considere $\alpha = -1$.
 i) Determine os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
 ii) Determine um subespaço próprio de A .
 iii) Indique se A é diagonalizável.
- [1v] 5. Um agricultor dispõe de 500 hectares de terra, 1500 horas de trabalho familiar e 120000 euros de capital de investimento para cultivar milho, trigo e soja. O milho deve ocupar pelo menos 100 ha e a área ocupada pelo trigo não deve exceder a área ocupada pelas outras duas culturas. As receitas por hectare de milho, trigo e soja, são respetivamente, 780€, 770€ e 720 €. Os custos, por hectare, de milho, trigo e soja, são respetivamente, 650€, 500€ e 550€. Cada hectare de milho, trigo e soja, requer, respetivamente, 8 horas, 7 horas e 8 horas. Pretende-se determinar a área a destinar a cada cultura de forma a maximizar o lucro (receita - despesa) resultante da produção.
- [2.25v] 6. a) Escreva $\mathcal{P}$ na forma *standard*.
 b) Justifique que $(2, \frac{8}{3}, 0)$ é uma solução admissível de $\mathcal{P}$.
 c) Averigue se a solução da alínea anterior corresponde a um vértice da região admissível de $\mathcal{P}$.