

Sistema linear

Um sistema linear a m equações e n variáveis $x_1, \dots, x_n$ é um sistema de equações da forma,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

- ▶ $a_{ij} \in \mathbb{R}$: *coeficiente da variável x_j na i -ésima equação.*
- ▶ $b_i \in \mathbb{R}$: *termo constante* ou *membro direito* da i -ésima equação.
- ▶ *Solução* de um sistema linear é uma *solução comum* a todas as equações desse sistema.

Exemplo de um sistema linear a 3 equações e 3 variáveis

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 \quad \quad - x_3 = -3 \end{cases}$$

Com a notação do slide anterior tem-se, por exemplo,

- ▶ $a_{11} = 2$: coeficiente da variável x_1 na primeira equação
- ▶ $a_{23} = 6$: coeficiente da variável x_3 na segunda equação
- ▶ $b_2 = 4$: termo constante ou membro direito da segunda equação
- ▶ $b_3 = -3$: termo constante ou membro direito da terceira equação

Conjunto de soluções e classificação de um sistema linear

Resolver um sistema linear é determinar o seu **conjunto de soluções (CS)**.
Um sistema linear é **classificado** como:

- ▶ **impossível (IMP)** se não possuir soluções
- ▶ **possível** se possuir pelo menos uma solução, sendo:
 - ▶ **determinado (PD)**, se possuir uma única solução
 - ▶ **indeterminado (PI)**, se possuir uma infinidade de soluções

Por exemplo, o sistema linear a 2 equações e 2 variáveis,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 4 \end{cases}$$

é PD com $CS = \{(2, 1)\}$ (verifique!).

- ▶ Dois sistemas lineares a m equações e n variáveis dizem-se **equivalentes** se possuem o mesmo conjunto de soluções (CS).

Matriz ampliada de um sistema a m equações e n variáveis

Consideremos o sistema linear a m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- ▶ $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ chama-se **matriz dos coeficientes** do sistema linear,
- ▶ $b = (b_1, \dots, b_m)$ chama-se o **vetor dos termos constantes** ou **membros direitos** do sistema,
- ▶ $x = (x_1, \dots, x_n)$ chama-se **vetor das incógnitas** ou **variáveis** do sistema e finalmente,

- ▶ $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$, chama-se **matriz ampliada do sistema** e contém toda a sua informação relevante

Matriz em escada e matriz reduzida

- ▶ Uma matriz diz-se em **escada** se o primeiro elemento não nulo de cada linha, que se designa por **pivot**, estiver à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior e todas as linhas nulas, caso existam, aparecerem no fim
- ▶ Uma matriz diz-se **reduzida** se
 - ▶ estiver em escada,
 - ▶ todos os pivots forem iguais a 1,
 - ▶ em cada coluna com pivot apenas o pivot é não nulo.

Exemplos de matrizes em escada e reduzida com os pivots a vermelho,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right]$$

Um sistema linear diz-se em **escada/reduzido** se a respectiva matriz dos coeficientes estiver em escada/reduzida.

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

- (I) "**Apagador**" - Adicionar a uma linha i uma linha $j \neq i$ multiplicada por um escalar λ ($L_i + \lambda L_j$).
- (II) Multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \neq 0$ (λL_i).
- (III) Permutar uma linha i com uma linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

A notação entre parênteses é uma simplificação da notação usada no Texto de Apoio!

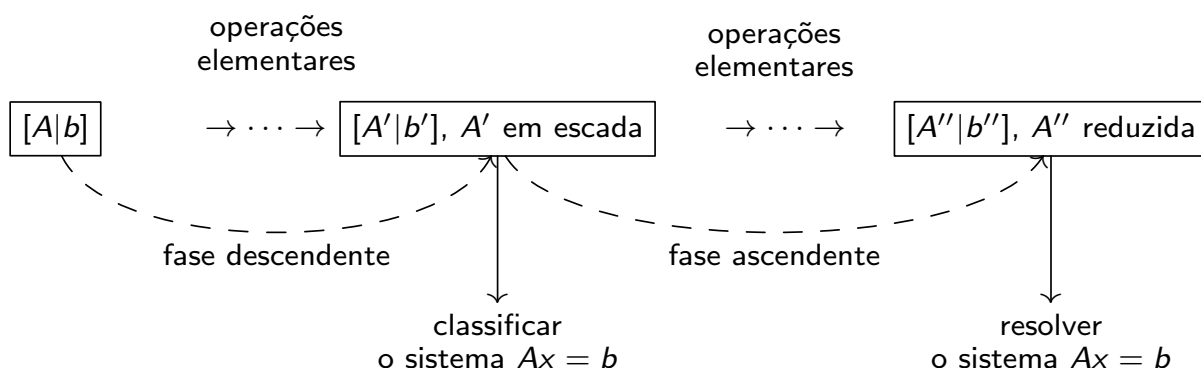
Teorema

As operações elementares (I), (II) e (III) transformam a matriz ampliada de um sistema linear na matriz ampliada de um sistema linear **equivalente**, ou seja, **com o mesmo CS**.

Definem-se de modo análogo **operações elementares sobre as equações de um sistema linear**.

Método de eliminação de Gauss para redução de sistemas

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases (descendente e ascendente), aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear, de acordo com o seguinte esquema:



Exemplificação do método de Gauss

Exemplo na aula

Vejam como se processa o método de eliminação de Gauss no sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

que representa a intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$.

TPC

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \quad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Redução do sistema: fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema do exemplo do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right] = [A'|b'].$$

Matriz dos coeficientes A' em **escada** $\Rightarrow$ podemos classificar o sistema:

- ▶ Todas as linhas de $[A'|b']$ correspondem a equações possíveis, isto é, não são do tipo $0 \ 0 \ 0 \mid *$ com $*$ $\neq 0$ ⁽³⁾. Logo o sistema é possível.
- ▶ Todas as colunas de A' têm **pivot** e portanto não há variáveis livres⁽⁴⁾. Logo o sistema é determinado e o CS é um ponto em $\mathbb{R}^3$.

³Que correspondem à equação impossível $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = *$.

⁴Cada variável fica determinada por uma equação.

Conclusão da redução do sistema: fase ascendente

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{6}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 + 5L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = [A''|b''].$$

Matriz dos coeficientes A'' está **reduzida** e $[A''|b'']$ corresponde à matriz ampliada do sistema reduzido,

$$\begin{cases} x_1 & & = & 2 \\ & x_2 & = & 1 \\ & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Logo, CS = $\{(2, 1, -1)\}$.