

Conceito de matriz

Definição de matriz

Sejam m, n inteiros positivos. Chama-se **matriz do tipo $m \times n$** a uma coleção $A = [a_{ij}]$ de mn números reais dispostos em m linhas e n colunas,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

a_{ij} : elemento da matriz que se encontra na **linha i** e **coluna j** da matriz

O índice **i** percorre as linhas da matriz e designa-se por **índice de linha**. O índice **j** percorre as colunas da matriz e designa-se por **índice de coluna**.

As matrizes constituem uma extensão dos vetores adequada ao estudo dos sistemas lineares

Exemplos

$$\blacktriangleright A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4 \times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$$

O elemento de A que se encontra na linha 4 e coluna 1 é $a_{41} = 5$

$\blacktriangleright A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ definida por $a_{1j} = 10$ e $a_{2j} = \pi$, para todo o j , é

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$\blacktriangleright A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $i, j = 1, 2, 3$, é

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matriz-linha e matriz-coluna ou vetor

- ▶ Se $m = 1$, $A_{1 \times n} = [a_{11} \ \dots \ a_{1n}]$ designa-se por *matriz-linha*.

Por exemplo, $A = [1 \ 3 \ -2]$ matriz-linha do tipo 1×3 .

- ▶ Se $n = 1$, $A_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-coluna* ou *vetor*.

Por exemplo, $(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- ▶ Em geral, $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser representado como m -uplo de números reais ou como matriz-coluna do tipo $m \times 1$:

$$x = (x_1, \dots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Matriz definida por vetores e matriz quadrada

- ▶ Se $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ denota a matriz do tipo $m \times n$ cujas colunas são os n vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Por exemplo, se $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_3 = (1, 10, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}.$$

- ▶ Se uma matriz A é do tipo $n \times n$, A diz-se *quadrada de ordem n* .

Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ anterior é quadrada de ordem 3.

- ▶ Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ ao conjunto dos elementos a_{ii} , $i = 1, \dots, n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular e matriz diagonal

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada de ordem n

- ▶ A diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior de ordem 3.

- ▶ A definição de *triangular inferior* é análoga e fica como exercício.
- ▶ A diz-se *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, se todos os elementos fora da diagonal principal de A forem nulos, e pode ser representada por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Por exemplo, $\text{diag}(2, -1, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3.

Matriz escalar e matriz identidade

- ▶ Uma matriz diagonal A de ordem n diz-se *escalar* se todas as entradas da diagonal principal forem iguais entre si, isto é, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- ▶ Se $\lambda = 1$, A designa-se por *matriz identidade de ordem n* e denota-se por I_n (ou simplesmente por I). A matriz identidade representa o *elemento neutro da multiplicação de matrizes como veremos mais adiante*

Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 é a matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade entre matrizes e matriz transposta

- ▶ $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo dizem-se *iguais* se os elementos homólogos forem iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$

Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 2 & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ w = 6 \end{cases}$

- ▶ A *transposta* de $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ do tipo $n \times m$, cujas colunas são as linhas de A pela mesma ordem.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Tem-se, obviamente, $(A^T)^T = A$.

- ▶ $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se *simétrica*, se $A^T = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Operações algébricas sobre matrizes: adição de matrizes

As operações algébricas sobre matrizes **estendem** as operações da **adição de vetores**, do **produto de um vetor por um escalar** e do **produto escalar de vetores** definidas anteriormente.

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ são matrizes do mesmo tipo define-se a **soma de A com B** , por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Por outras palavras, os elementos de $A + B$ obtêm-se **somando os elementos homólogos de A e de B** .

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+2 & 0+1 \\ 4-3 & 5+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ define-se o *produto de A pelo escalar λ* , por

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}$$

Por outras palavras, λA obtém-se multiplicando *cada elemento de A por λ*

Se $\lambda = -1$, λA denota-se simplesmente por $-A$

Por exemplo, se $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix}$, então

$$\lambda A = 3 \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 20 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 13 \\ 3 \cdot 18 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -3 & 39 \\ 54 & -6 & 243 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes e do produto de escalares por matrizes

Sejam A , B e C matrizes do tipo $m \times n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + [0]_{m \times n} = A$ ($[0]_{m \times n}$ matriz cujos elementos são todos nulos)
4. $A + (-A) = [0]_{m \times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1.A = A$
9. $(A + B)^T = A^T + B^T$
10. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
11. $(A^T)^T = A$

Propriedades das operações algébricas sobre matrizes

A **matriz nula** $[0]_{m \times n}$ é portanto o **elemento neutro** da adição de matrizes.

As propriedades (1)-(8) decorrem das propriedades da adição e do produto de números reais e são análogas às propriedades da adição e do produto por escalar para vetores.

As restantes três propriedades são evidentes.

Exercício na aula

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 a matriz identidade de ordem 2. Simplifique expressão $((A^T + B)^T + 4I_2)^T$ indicando as propriedades do slide anterior que utilizar e calcule o seu valor.

TPC

Mostre que se A é uma matriz quadrada então $A + A^T$ é simétrica.

Produto de matrizes

► Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas*, se

número de colunas de A = número de linhas de B .

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 4}$ são

encadeadas pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Mas B e A *não são encadeadas* !

Definição do produto de matrizes

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ são encadeadas, define-se o *produto* de A por B , denotado AB , como sendo a matriz $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ik} &= (\text{linha } i \text{ de } A) \cdot (\text{coluna } k \text{ de } B) \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot (b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}. \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ são encadeadas, tendo-se

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -1 & \\ \hline 4 & 5 & 0 & \\ \hline 1 & 8 & 5 & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{array} \right] \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 8 + 0 & -2 + 16 - 5 \\ 4 + 10 + 0 & -4 + 20 + 0 \\ 1 + 16 + 0 & -1 + 32 + 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & 16 \\ 17 & 56 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \end{aligned}$$

Por exemplo, o elemento de AB que se encontra na **linha 3** e **coluna 1** é o produto escalar da terceira linha de A pela primeira coluna de B , isto é, $(1, 8, 5) \cdot (1, 2, 0) = 17$.

Produto escalar via produto de matrizes...

- ▶ O produto de matrizes estende o conceito de produto escalar de vetores: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então

$$x^T y = x \cdot y$$

Por exemplo, se $x = (-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $y = (1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$x^T y = [-1 \ 1 \ 3]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = [(-1, 1, 3) \cdot (1, 0, 1)]_{1 \times 1} = [2]_{1 \times 1} = 2^{(1)} = x \cdot y$$

▶ Note-se que $xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} [1 \ 0 \ 1]_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

¹As matrizes 1×1 identificam-se com o seu único elemento.

Potência de uma matriz quadrada

Potência inteira não negativa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n definem-se as *potências inteiras não negativas de A* por,

$$A^0 = I_n \quad \text{e} \quad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ vezes}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

TPC

Calcular A^3 com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$.

Propriedades

Propriedades do produto de matrizes

Sejam A, B, C matrizes, I a matriz identidade de ordem conveniente, $[0]$ a matriz nula de tipo conveniente e $\lambda \in \mathbb{R}$ e k um inteiro não negativo. Sempre que as operações estejam definidas, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (**associativa**)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (**distributiva**)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (**distributiva**)
4. $AI = IA = A$ (**el. neutro da mult.**)
5. $A[0] = [0]A = 0$ (**el. absorvente da mult.**)
6. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (**compatibilidade dos produtos**)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ (**!**)
8. $(A^k)^T = (A^T)^k$

“Não propriedades” do produto de matrizes

Ao contrário do que sucede com a adição, algumas propriedades do produto de números reais **não se generalizam** para o produto de matrizes.

Exercício na aula

Calcular os produtos AB e BA com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

O que observa ?

“Não propriedades” do produto de matrizes

- ▶ O produto de matrizes **não é comutativo**, ou seja, em geral,

$$AB \neq BA.$$

- ▶ A **lei do anulamento do produto também não é válida**, ou seja, em geral,

$$AB = [0] \not\Rightarrow (A = [0] \text{ ou } B = [0]).$$

- ▶ A **lei do corte também não é válida** ou seja, em geral, dadas matrizes A , B e C , com $A \neq [0]$ ⁽²⁾,

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

($[0]$ denota uma matriz nula de ordem conveniente)

TPC

Dar exemplos de 3 matrizes quadradas de ordem 2, A , B e C , para as quais a lei do corte falhe

²Para a lei do corte ser válida para matrizes devemos substituir a condição $A \neq [0]$ por A invertível, conceito que daremos mais adiante.

Uma consequência inesperada...

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem **não permutáveis**, isto é, $AB \neq BA$, obtém-se aplicando as propriedades distributivas do produto de matrizes,

- ▶ $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$.
- ▶ $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- ▶ $(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

A não comutatividade do produto de matrizes teve como consequência que **não são válidos para o produto de matrizes quadradas os análogos dos casos notáveis da multiplicação de números reais!**

Observação

Deve-se ter uma particular atenção ao simplificar expressões que envolvam produtos de matrizes!

Simplificação de expressões...

Exercício na aula

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2 \times 1}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2}.$$

Desenvolva e calcule $((BC)^T + A)^2$.

Ainda o produto de matrizes...

Observação

(i) Se $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p]$ então

$$AB = A [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_p] = [Av_1 \ Av_2 \ \cdots \ Av_p],$$

ou seja, a k -ésima coluna do produto AB é o produto de A pela k -ésima coluna de B (do tipo $n \times 1$) - produtos à direita “atuam nas colunas”...

(ii) Transpondo o resultado do ponto anterior, conclui-se que a i -ésima linha do produto AB é o produto da linha i de A (do tipo $1 \times n$) pela matriz B - produtos à esquerda “atuam nas linhas”...

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2]$,

com $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (3, 1, -1)$, $v_1 = (-1, 0, 3)$ e $v_2 = (1, 1, 2)$, tem-se que

$$AB = A [v_1 \ v_2] \stackrel{(i)}{=} [Av_1 \ Av_2] = \left[\begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} v_1 \quad \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} v_2 \right] \stackrel{(ii)}{=} \begin{bmatrix} u_1^T v_1 & u_1^T v_2 \\ u_2^T v_1 & u_2^T v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$