

Exercícios na aula

Aplicando o método de Gauss reduza os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

$$(b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Redução do sistema do exercício (a): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema (a) do slide anterior obtém-se:

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 + L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - 4L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] = [A'|b']. \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes A' está em **escada**, tendo-se:

- ▶ Não há linhas do tipo $0 \ 0 \ 0 \ 0 \mid *$ com $*$ $\neq 0$, isto é, não há equações impossíveis.
- ▶ A 4ª coluna de A' não tem pivot logo x_4 é variável livre, isto é, pode tomar qualquer valor.

Logo o sistema é **possível indeterminado** (PI).

Redução do sistema do exercício (a): fase ascendente

Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss à matriz em escada $[A'|b']$ do slide anterior obtém-se:

$$\begin{aligned} [A'|b'] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{L_1 - 2L_3 \\ L_2 - L_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = [A''|b''] \rightarrow \begin{cases} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases} \end{aligned}$$

A matriz dos coeficientes A'' está em **reduzida**. Passando nas duas últimas equações a variável livre x_4 para o membro direito, podemos escrever as variáveis *pivot* (a azul) à custa da variável livre x_4 , obtendo-se

$$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = 1, x_2 = -1 + x_4, x_3 = 1 - x_4, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

que possui uma **infinitude de soluções**.

Cada atribuição de um valor para a variável livre x_4 dá origem a uma solução distinta do sistema. **Por exemplo, se $x_4 = 0$, obtém-se a solução $(1, -1, 1, 0)$.**

Álgebra Linear 2026/27 - Pedro C Silva - Instituto Superior de Agronomia / ULisboa

43

Variáveis *pivot* e variáveis livres

Observação

- ▶ As **variáveis associadas às colunas sem *pivot*** na matriz em escada designam-se por **variáveis livres** e podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$.
- ▶ As **variáveis associadas às colunas com *pivot*** na matriz em escada designam-se por **variáveis *pivot*** ou **variáveis determinadas** e são escritas em função das variáveis livres.

Redução do sistema do exercício (b): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada (b) do slide 41 obtém-se:

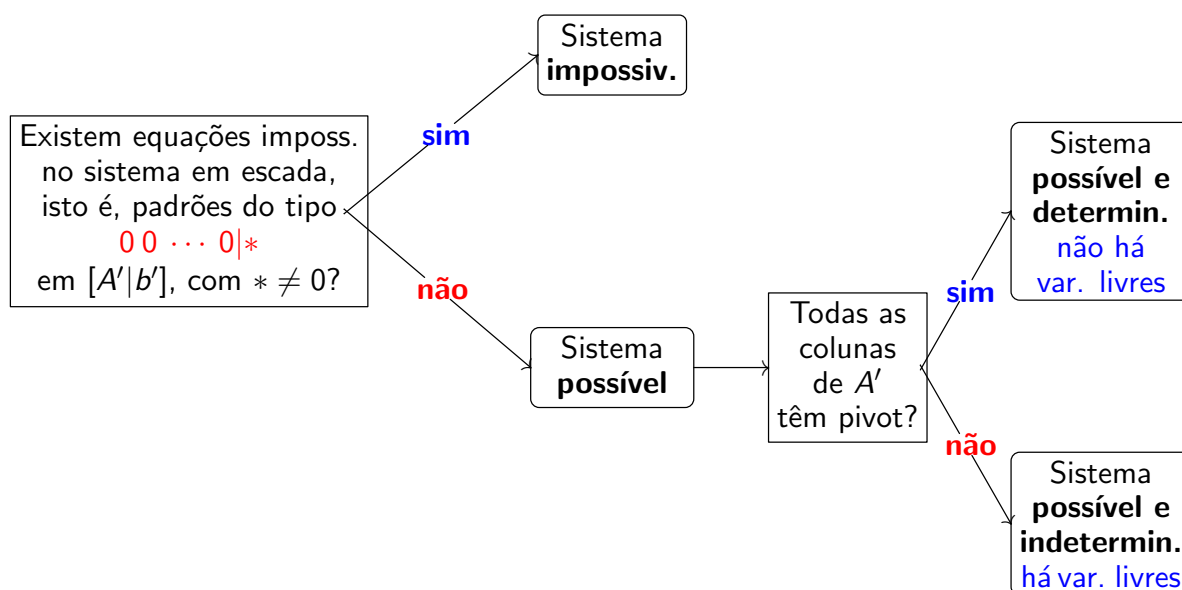
$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1}]{\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] = [A'|b'], \quad \text{com } A' \text{ em escada.}$$

- A última linha da matriz $[A'|b']$ corresponde à equação impossível

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2,$$

e portanto o sistema é **impossível** (IMP) e $CS = \emptyset$.

Resumo da classificação de um sistema em escada



Algoritmo de eliminação de Gauss: fase descendente

- ▶ **Input:** Matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear
- ▶ **Objectivo:** Redução do sistema linear
- ▶ **Fase descendente:**
 - ▶ Aplicando operações elementares do **tipo III** trocar, se necessário, linhas em $[A|b]$ de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes
 - ▶ Usando operações elementares do **tipo I** ("Apagador") e o pivot da primeira linha, eliminar os restantes elementos da coluna abaixo desse pivot
 - ▶ Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz

No final da fase descendente obtém-se uma matriz $[A'|b']$ com A' em escada e **podemos classificar o sistema**.

A matriz $[A'|b']$ **não é única**, i.e, depende das operações efetuadas.

Algoritmo de eliminação de Gauss: fase ascendente

- ▶ **Fase ascendente:** (apenas se aplica aos sistemas possíveis)
 - ▶ Usando operações elementares do **tipo II e I** tornar o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' igual a 1 e usar esse pivot para eliminar os elementos da coluna acima desse pivot
 - ▶ Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda)

No final da fase ascendente obtém-se uma matriz $[A''|b'']$ com A'' **reduzida**, donde resulta imediatamente o **CS** do sistema, escrevendo as variáveis pivot em função das variáveis livres. Observemos que:

- ▶ A matriz $[A''|b'']$ é **única**, isto é, **não depende da sequência de operações elementares efectuada**

Consequência

Dois sistemas com m equações lineares e n variáveis são **equivalentes** se e só se aplicando o método de Gauss às respectivas matrizes ampliadas obtemos **a mesma matriz reduzida**.