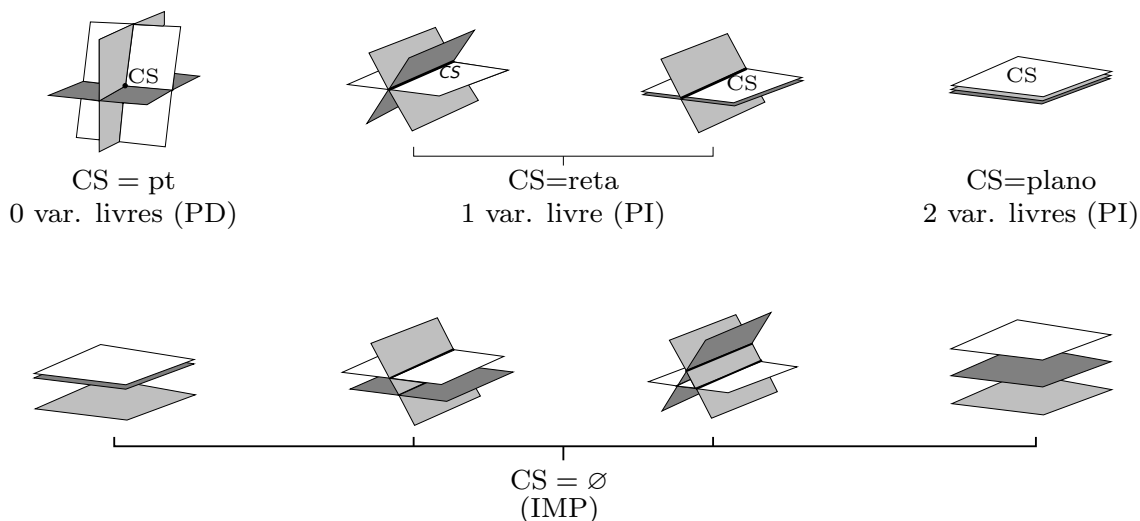


# Sistemas lineares a 3 equações e 3 variáveis ( $3 \times 3$ )

- Um sistema a 3 equações e 3 variáveis representa a **interseção** de 3 planos no espaço ( $\mathbb{R}^3$ ) e geometricamente existem 8 casos distintos:



Desafio :)

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores

## Inversa de uma matriz

### Definição de inversa

Uma matriz **quadrada**  $A$  de ordem  $n$  diz-se **invertível** ou **não singular** se existir uma matriz quadrada  $B$  da mesma ordem que  $A$  tal que

$$AB = I_n \quad \text{e} \quad BA = I_n,$$

onde  $I_n$  denota a matriz identidade de ordem  $n$ . Caso contrário,  $A$  diz-se **singular**. A matriz  $B$ , quando existe, designa-se por **inversa** de  $A$ .

Por exemplo,  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  é **invertível** com inversa  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ .

De facto, tem-se

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$
$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Resulta ainda da definição que  $B$  é também invertível com inversa  $A$ .

## Observações

- Pode-se mostrar que

$$AB = I_n \Rightarrow BA = I_n,$$

e que

$$BA = I_n \Rightarrow AB = I_n.$$

- Logo para mostrar que  **$A$  é invertível** basta encontrar uma matriz quadrada  $B$  da mesma ordem que  $A$  que verifique **uma das relações**:

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

Nessa altura,  $B$  é inversa de  $A$ .

### Exercícios na aula

- Mostre que se  $B$  é inversa de  $A^2$  então  $AB$  é inversa de  $A$
- Mostre que se  $A_{n \times n}$  verifica  $A^3 - 3A - I_n = 0$  então  $A$  é invertível.

## Unicidade da inversa

### Proposição

A inversa de uma matriz  $A$ , quando existe, é **única** e denota-se por  **$A^{-1}$** .

### Demonstração da proposição

Temos que mostrar que se  $B$  e  $C$  forem inversas arbitrárias de  $A$  então têm que ser iguais. Como  $B$  é inversa de  $A$  tem-se, em particular,

$$BA = I.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade à direita por  $C$  tem-se

$$BAC = C,$$

donde resulta imediatamente  $B = C$  uma vez que  $AC = I$ .  $\square$

Por exemplo, considerando as matrizes do exemplo do slide 56, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

## Inversa de matrizes diagonais

Vamos calcular inversa da matrix diagonal  $\text{diag}(2, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  (caso exista). Para isso temos que determinar uma matriz quadrada de ordem 2,  $B = [b_{ij}]$ , tal que  $AB = I_2$  (caso exista). Ora,

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2b_{11} & 2b_{12} \\ 3b_{21} & 3b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2} \\ b_{12} = b_{21} = 0 \\ b_{22} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \text{diag}(2^{-1}, 3^{-1}). \end{aligned}$$

Logo  $\text{diag}^{-1}(2, 3) = \text{diag}(2^{-1}, 3^{-1})$ . Mais geralmente temos o seguinte.

### Proposição

A matriz diagonal  $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é invertível se e só se  $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$ , tendo-se nesse caso

$$\text{diag}^{-1}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \dots, a_n^{-1}).$$

## Inversa de uma matriz $2 \times 2$ não diagonal

- Consideremos a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ . Para determinar a sua inversa, caso exista, vamos resolver a equação matricial,

$$AX = I_2,$$

cujas soluções correspondem à inversa de  $A$ . Pela unicidade da inversa a solução, caso exista, tem que ser **única**.

- Escrevendo,  $X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$  e  $I_2 = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , tem-se

$$\begin{aligned} AX = I_2 &\Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} Ax & Ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \end{bmatrix} \quad (\text{ver o slide 30}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Ax = e_1 \rightarrow [A|e_1] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \\ Ay = e_2 \rightarrow [A|e_2] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

## Redução simultânea de sistemas lineares e inversa

- Podemos reduzir **simultaneamente** ambos os sistemas  $Ax = e_1$  e  $Ay = e_2$ , uma vez que possuem a **mesma matriz de coeficientes**  $A$ , ampliando  $A$  com  $e_1, e_2$ , isto é, com a **matriz identidade**  $I_2$ . Aplicando a fase descendente obtém-se então,

$$[A | I_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Logo ambos os sistemas  $Ax = e_1$  e  $Ay = e_2$  são PD e portanto  $AX = I_2$  tem solução única (que é a inversa de  $A$ ). Em particular,  **$A$  é invertível**.

- Aplicando a fase ascendente tem-se,

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{-L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right].$$

Logo as soluções de  $Ax = e_1$  e  $Ay = e_2$  são  $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$  e  $y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ , obtendo-se finalmente

$$A^{-1} = X = [x \ y] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

## Inversa e redução simultânea de sistemas (caso geral)

- De modo análogo pode-se mostrar que resolver a equação matricial  **$AX = I_n$**  com  $A$  matriz arbitrária de ordem  $n$ , equivale a resolver  **$n$  sistemas lineares** com matrizes ampliadas

$$[A | e_1], [A | e_2], \dots, [A | e_n], \quad (1)$$

onde  $e_1, e_2, \dots, e_n$  são as  $n$  colunas da matriz identidade  $I_n$ .

- Como os  $n$  sistemas **têm a mesma matriz de coeficientes**  $A$  podem ser reduzidos simultaneamente **aplicando o método de Gauss à matriz ampliada**  $[A | e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n] = [A | I_n]$ .
- Pela **unicidade da inversa**, um dos dois casos tem que ocorrer:
  - os  $n$  sistemas (1) são todos PD** - nessa altura  $A$  é **invertível** e as  **$n$  colunas de  $A^{-1}$  são as soluções dos  $n$  sistemas (1)**;
  - pelo menos um dos  $n$  sistemas (1) é impossível** - nessa altura  $A$  é **singular**.
- A **redução simultânea de sistemas** pode também ser aplicada para resolver equações matriciais mais gerais, do tipo  **$AX = B$** , aplicando o método de Gauss à matriz ampliada  $[A | B]$ ...