

- ▶ Vamos agora mostrar que certo tipo de equações matriciais que envolvem o produto de matrizes são equivalentes a sistemas lineares.
- ▶ A relação referida no ponto anterior vai permitir, em particular, manipular e resolver sistemas lineares usando as operações com matrizes.
- ▶ Para ilustrar as ideias dos pontos anteriores vamos começar por considerar um pequeno exemplo⁵.

⁵O exemplo dado no próximo slide é distinto do exemplo que foi dado nas aulas teóricas.

Sistemas lineares e equações matriciais - exemplo

- ▶ Consideremos a equação matricial $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- ▶ Tem-se,

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}, \end{aligned}$$

o que mostra que o sistema linear acima, cuja matriz ampliada é $[A|b]$, também pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$.

Sistemas lineares e equações matriciais - caso geral

Mais geralmente, pode-se mostrar que um sistema linear arbitrário com matriz ampliada $[A|b]$ é equivalente à equação matricial $Ax = b$, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Consequência

Podemos definir um sistema linear de 3 formas distintas:

- ▶ a partir de um conjunto finito de equações lineares;
- ▶ a partir de uma equação matricial do tipo $Ax = b$;
- ▶ a partir de uma matriz ampliada $[A|b]$.

Em particular, tem-se que uma solução de um sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ corresponde a uma solução da equação matricial $Ax = b$, isto é, a um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = b$, onde n é o número de variáveis do sistema.

Interpretação geométrica de sistemas de equações lineares

- ▶ Um sistema linear a m equações e n variáveis representa a intersecção de:
 - ▶ m retas no plano ($\mathbb{R}^2$) se $n = 2$;
 - ▶ m planos no espaço ($\mathbb{R}^3$), se $n = 3$;
 - ▶ m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$.
- ▶ Iremos principalmente interpretar sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, cujos CS estão contidos no plano e no espaço, tendo-se:
 - ▶ Se o número de variáveis livres for zero, CS é um ponto (PD);
 - ▶ Se o número de variáveis livres for um, CS é uma reta (PI);
 - ▶ Se o número de variáveis livres for dois, CS é um plano (PI).

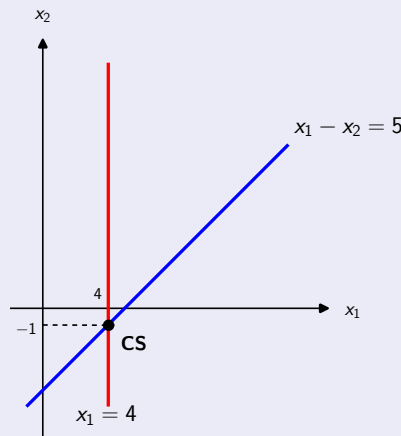
Interpretação geométrica de sistemas lineares - exemplos

Exemplo 2×2

O sistema a **2** equações e **2** variáveis,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

é PD (não possui variáveis livres) e geometricamente representa a **interseção** de **duas retas** no **plano** ($\mathbb{R}^2$), concorrentes no ponto $(4, -1)$, tendo-se portanto **CS** = $\{(4, -1)\}$ (ver a figura). .



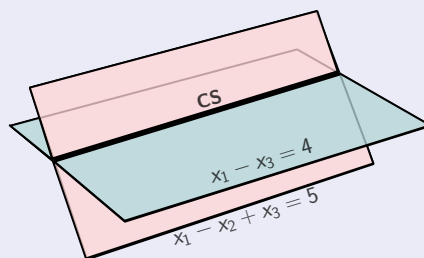
Interpretação geométrica de sistemas lineares - exemplos

Exemplo 2×3

O sistema a **2** equações e **3** variáveis,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

é PI (possui a variável livre x_3) e geometricamente representa a **interseção** de **dois planos** no **espaço** ($\mathbb{R}^3$), concorrentes numa **reta** (porque possui uma variável livre),



que corresponde ao **CS** do sistema, tendo-se

$$\text{CS} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4 + x_3, x_2 = -1 + 2x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$