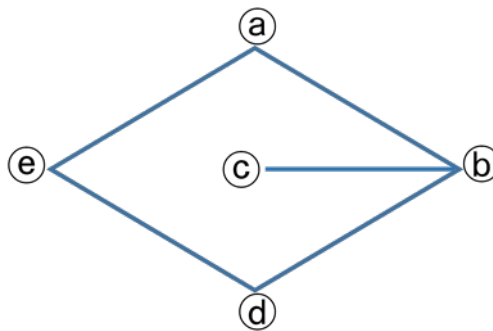


Parte B - Introdução à Teoria da Probabilidade

2.1. Dois jogadores lançam à vez um dado equilibrado. Quando o jogador A obtém mais pontos do que B, o resultado da jogada é “1”, quando B obtém mais pontos do que A o resultado é “-1”; quando empatam o resultado é “0”. Considere a variável aleatória X que representa o resultado de uma jogada.

- a) Descreva o espaço de resultados da experiência aleatória.
- b) Qual é a probabilidade de, numa jogada, haver empate?
- c) Construa a distribuição de probabilidades de X e represente-a graficamente.

2.2. Um rato parte do ponto a e faz 2 trajetos consecutivos entre os pontos que se encontram ligados no diagrama. Em cada ponto é escolhido o ponto seguinte aleatoriamente. A distância entre cada par de pontos ligados é 1.



Seja X a v.a. que representa a distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada ao fim de 2 trajetos, por exemplo no percurso a-b-a a distância é nula e no percurso a-b-c a distância é 2. Caracterize a v.a. X , construindo a sua distribuição de probabilidades.

2.3. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	-2	-1	0	1	2
$P[X = x_i]$	0.1	0.3	0.1	0.2	0.3

- a) Calcule $E[X]$ e $Var[X]$.
- b) Determine a função distribuição cumulativa de X .
- c) Calcule $P(X \geq 0 | X < 2)$.
- d) Determine a distribuição de probabilidades da variável aleatória $Y = X^2$.

2.4. O número de televisores encomendados mensalmente em determinada loja é bem descrito por uma variável aleatória X com a seguinte função distribuição cumulativa:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 0.1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 0.3 & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0.5 & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

- Determine a distribuição de probabilidade da variável aleatória X .
- Quantos televisores deve ter a loja em *stock*, por mês, para que a probabilidade de satisfazer todas as encomendas seja superior a 0.85?
- Se num dado mês a loja só tiver 2 televisores em *stock*, determine a distribuição de probabilidades da variável aleatória que representa a diferença, em valor absoluto, entre as encomendas e o *stock*.

2.5. Seja X uma variável aleatória discreta com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	$1 - 2k$	$k - 1$	k	$2k$
p_i	p	$3p$	p	p

- Sabendo que $E[X] = 1/3$ calcule o valor de p e de k .
- Calcule $Var[X]$.
- Deduza a distribuição de probabilidades da variável aleatória $Y = X^2 - 2$.

2.6. Num jogo do dardo para iniciantes, a distribuição da distância entre o centro e o ponto onde o dardo acerta (distância ao alvo) é uma v.a. X com a seguinte função densidade

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

- Determine a .
- Determine a função distribuição cumulativa de X .
- Determine a mediana e a média da distância. Interprete os valores obtidos.
- Calcule o valor b tal que a probabilidade de a distância ao alvo ser superior a b seja igual a 0.05.

2.7. Considere que a concentração de poluente (em unidades adequadas) nos gases emitidos por uma fábrica é uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2})x & \text{se } 0 < x < 2 \\ e^{-x} & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

- a) Determine a função distribuição cumulativa de X .
 - b) Indique duas propriedades que uma qualquer função distribuição cumulativa deve verificar. Averigue se a função que obteve na alínea anterior verifica essas propriedades.
 - c) Qual é a probabilidade de a concentração ser superior a 2?
 - d) A concentração mediana será superior ou inferior a 2? Justifique.
- 2.8.** Um comboio parte de Alcântara Terra de 30 em 30 minutos, ao minuto 26 e ao minuto 56 de cada hora (sem atrasos). Um passageiro sai do ISA de forma a entrar no comboio até 2 minutos antes da partida. Seja X a variável aleatória que representa o tempo (minutos) que o passageiro espera pela partida do comboio. Para certos valores de a e b

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ ax + b & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

é a função distribuição cumulativa de X .

- a) Determine a e b .
 - b) Determine a função densidade de probabilidade de X .
 - c) Calcule o primeiro quartil da distribuição de X . Interprete.
 - d) Calcule $P(X < 1 | X \geq \frac{1}{2})$. Interprete.
 - e) Calcule:
 - i) $E[X]$ e $Var[X]$;
 - ii) $E\left[\frac{1}{X+2}\right]$, $E[3X+2]$, $Var[2X+5]$ e $Var[2-3X]$.
- 2.9.** Um fornecedor de um produto de laboratório tem uma capacidade de armazenamento de 150 kg. No início de cada mês é reposto o stock até à capacidade máxima de armazenamento. As vendas mensais deste produto em centenas de kg são dadas por uma variável aleatória X , cujo comportamento é bem descrito pela seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x \leq 1.5 \\ 0 & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

- a) Determine a função distribuição cumulativa da v.a. X .
- b) Se a dada altura de um mês já foram vendidos pelo menos 50 kg do produto, qual a probabilidade de se venderem mais de 100 kg até ao fim desse mês?
- c) Indique o valor médio mensal e a mediana mensal das vendas daquele produto.
- d) O lucro, Y , da venda do referido produto é função de vários factores. Considere a seguinte expressão (simplificada) do lucro em função das vendas $Y = 50X - 25$.
 - i) Qual o valor esperado do lucro mensal?

ii) Qual a probabilidade de, num dado mês, não haver prejuízo ?

- 2.10.** Num processo de inventário concluiu-se que a raridade de determinada espécie animal era directamente proporcional à área observada até que se avistasse um exemplar da espécie, associada ao percurso de amostragem. Considere então a v.a. X designando a distância percorrida até se avistar algum exemplar da espécie, com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b}{2x^2} & 1 \leq x \leq b \\ 0 & \text{restantes valores de } x. \end{cases}$$

- Determine b de modo que $f(x)$ seja uma função densidade.
 - Determine a função distribuição cumulativa de X .
 - Calcule a mediana de X .
 - Considere a v.a. $Y = C_0 + C_1X$, que caracteriza o custo de amostragem, onde C_0 designa os custos fixos e C_1 o custo por unidade de percurso. Determine o custo esperado para o inventário.
- 2.11.** Num estudo prévio à instalação de uma central eólica numa dada região, um meteorologista considerou que a velocidade diária mínima do vento X , em m/s, é uma variável aleatória com função de distribuição cumulativa, F , assim definida

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < a \\ 1 - \exp\left(-\frac{x-2}{3}\right) & \text{se } x \geq a, \quad a > 0 \end{cases}$$

- Mostre, justificando, que $a = 2$.
 - Determine a função densidade de X .
 - Determine a mediana de X .
 - Determine a probabilidade de num dado dia a velocidade mínima exceder 3 m/s se for inferior a 5 m/s.
 - Admita que no caso da velocidade diária mínima ser inferior ou igual a 5 m/s, a central eólica funcionará adequadamente com uma probabilidade de 0.01, mas se for superior a 5 m/s funcionará adequadamente com uma probabilidade de 0.95.
 - Qual a percentagem de dias em que a central funcionará adequadamente?
 - Qual a probabilidade de num dado dia a central não estar a funcionar adequadamente e a velocidade mínima do vento ser superior a 5 m/s?
- 2.12.** Sejam X e Y o número de vitelos e leitões, respectivamente, que nascem anualmente numa pequena quinta de criação de gado.

O quadro seguinte dá a distribuição de probabilidades conjunta de X e Y .

$X \setminus Y$	6	7	8	9	10
2	0.05	0.04	0.04	0.10	0.02
3	0.13	0.10	0.10	0.10	0.07
4	0.07	0.06	0.06	0.05	0.01

- Escreva a distribuição de probabilidades do número de leitões nascidos por ano nesta quinta.
- Serão X e Y v.a. independentes? Justifique.
- Considere o número total de leitões e vitelos que nascem anualmente. Qual o valor esperado para aquele total?
- Determine a distribuição de probabilidades do número de vitelos que nascem num dado ano, sabendo que nasceram 7 leitões.

2.13. O número de exemplares de cada uma de duas espécies animais, A e B, avistados numa visita, pode ser considerado um par aleatório (X, Y) em que X designa o número de exemplares da espécie A e Y da espécie B. Dispõe-se da seguinte informação sobre a distribuição de probabilidade conjunta do par (X, Y) :

$X \setminus Y$	0	1	2	3
0	a	0.3	0.02	0
1	b	0.07	0.14	0.04
≥ 2	0.02	0.03	0.04	0.06

- Determine a distribuição marginal da v.a. Y .
- Determine a e b sabendo que $P[X = 0|Y = 0] = 0.6$.
- Determine o valor esperado do número de exemplares avistados da espécie B, quando se avistam pelo menos dois da espécie A.
- O número de exemplares avistados da espécie A será independente do número de exemplares avistados da espécie B?

2.14. Um cliente de uma livraria pode fazer encomendas de livros estrangeiros em inglês e francês que não existam em stock.

O número de livros em inglês e francês encomendados semanalmente é o par aleatório (X, Y) com a seguinte distribuição de probabilidades:

$X \setminus Y$	1	2	3	4
0	0.01	0.02	0.04	0.03
1	0.05	0.10	0.20	0.15
2	0.04	0.08	0.16	0.12

- Qual a probabilidade de numa semana serem encomendados no máximo dois livros?
- Qual a percentagem de semanas em que existe igualdade de livros ingleses e franceses encomendados?
- Determine as distribuições marginais das variáveis X e Y .
- Calcule o coeficiente de correlação entre as variáveis X e Y e interprete o seu resultado.
- Qual a distribuição de probabilidades da variável aleatória “Número total de livros em inglês e francês encomendados semanalmente”?

- f) Qual a probabilidade de numa semana se encomendar pelo menos um livro em inglês sabendo que foram encomendados dois livros em francês?

2.15. Para avaliar uma determinada doença em perus efectua-se dois testes. Designe-se por X e Y as v.a.'s associadas aos resultados de cada um dos testes. Sabe-se que aqueles testes dão resultado positivo (valor 1) ou negativo (valor 0) com as probabilidades indicadas na tabela seguinte. O valor da constante a varia consoante a gravidade da doença.

	Y	0	1
X			
0		$1/4-a$	$1/4+a$
1		$1/4$	$1/4$

- a) Quais os valores possíveis para a ?
- b) Determine a função distribuição cumulativa de X .
- c) Para que valor(es) de a são as variáveis aleatórias independentes?
- d) Determine a função massa de probabilidade de $Y|X = 1$.
- 2.16.** No controlo de qualidade de embalagens de chá, as embalagens são transportadas num tapete que pode recuar, parar ou avançar. O movimento faz-se em saltos de 1 metro. Considere a v.a. discreta X que toma os valores -1 (recua 1m), 0 (para) ou 1 (avança 1m) com a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	-1	0	1
$P[X = x_i]$	$p - \frac{1}{4}$	p	$p + \frac{1}{4}$

- a) Determine p .
- b) Determine $Var[3X - 2]$.
- c) As embalagens podem conter chá preto ou chá verde. Seja Y uma variável aleatória uniforme discreta tomando os valores 0 (embalagem de chá preto) ou 1 (embalagem de chá verde), independente de X .
- i) Determine a função massa de probabilidade do par (X, Y) .
- ii) O que significa, no contexto do problema, o acontecimento $Y > X$. Calcule $P(Y > X)$.
- iii) Determine a variância de $X - Y$.
- 2.17.** Num projecto duas tarefas A e B decorrem de forma independente. Sejam X e Y as v.a.s contínuas que representam o tempo (em anos) de duração das tarefas A e B, respectivamente. As funções densidade de X e de Y são:

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases} ; \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{outros valores de } y \end{cases}$$

- a) Determine a função distribuição cumulativa de X .

- b) Qual é a probabilidade de a tarefa A durar mais de meio ano?
- c) Qual é o tempo médio de duração da tarefa A?
- d) Determine a probabilidade de a tarefa A durar mais de meio ano se:
 - i) a tarefa B durar menos de 1 ano.
 - ii) a tarefa B durar 1 ano.
- e) Determine:
 - i) $\text{Var}[X - Y]$.
 - ii) $\text{Cov}[X, Y - X]$.

2.18. O número de unidades de um produto procurado diariamente pelos clientes de uma empresa é uma v.a. X com distribuição uniforme discreta tomando valores 0, 1, 2, 3.

- a) Determine o valor esperado e a variância de X .
- b) Obtenha a distribuição de probabilidade da variável $Y = 2X + 1$. Caracterize a distribuição que obteve e comente o resultado.

Nota:

Nas restantes questões, sempre que possível utilize as **tabelas** das distribuições e **comandos Python**.

2.19. Uma experiência aleatória pode dar dois resultados: êxito ou fracasso, sendo a probabilidade de resultar em êxito de 0.9. O custo de uma experiência que resulte em êxito é de 5 euros e em fracasso de 10 euros. A experiência é repetida 20 vezes, de forma independente. Seja X a variável aleatória que conta o número de êxitos.

- a) Identifique a distribuição de X .
- b) Calcule $P[X > 15]$.
- c) Calcule a probabilidade de haver mais êxitos do que fracassos.
- d) Mostre que o custo total C das 20 experiências pode ser expresso como $C = 200 - 5X$.
- e) Calcule $E(C)$.
- f) Calcule $P[C < 125]$.

2.20. Numa experiência laboratorial injectaram-se n cobaias com uma determinada droga que inibe a síntese de proteínas. A probabilidade de uma cobaia morrer durante a experiência, devido à droga, é 0.2. Seja X a v. a. que designa “o número de cobaias que morrem durante a experiência”.

- a) Identifique o modelo de probabilidade para X .
- b) Supondo que se utilizaram 15 cobaias, qual a probabilidade de:

- i) Duas delas morrerem?
 - ii) Pelo menos 8 delas sobreviverem?
 - c) Determine o número mínimo de cobaias que têm que ser utilizadas na experiência de modo que a probabilidade de morrer pelo menos uma cobaia seja superior a 0.95.
- 2.21.** Um produtor de bolbos de tulipa sabe que 5% dos seus bolbos não vingam. Estes bolbos são vendidos em sacos de 10 unidades.
- a) Caracterize a variável que designa o número de bolbos que não vingam em cada saco.
 - b) Calcule a probabilidade de, num saco escolhido ao acaso, só um bolbo não vingar.
 - c) O produtor anuncia que, em cada saco, pelo menos 9 bolbos vingam. Determine a percentagem de clientes que podem reclamar devido a publicidade enganosa.
- 2.22.** Uma pessoa tem no frigorífico iogurtes que ultrapassaram o prazo de validade. Suponha que a probabilidade de um destes iogurtes estar estragado é 0.1. Também tem no frigorífico 2 frascos de compota idênticos, sem rótulo, um de maçã e outro de marmelo. Para o lanche retira ao acaso 2 iogurtes fora de prazo e 1 frasco de compota. Seja X a v.a. que representa o número de iogurtes estragados que encontra quando vai lanchar e Y a v.a. que representa o número de frasco de compota de marmelo (0 ou 1).
- a) Escreva a distribuição de probabilidade de cada uma das variáveis X e Y .
 - b) Determine $E[Y]$ e $Var[Y]$.
 - c) Mostre que $Z = 2Y + 1$ é uma variável aleatória que tem também distribuição uniforme discreta.
 - d) Sendo X e Y variáveis independentes (porquê?) determine, justificando:
 - i) A distribuição de probabilidade conjunta do par (X, Y) .
 - ii) $Cov[X, Y]$.
 - iii) $Var[Y - 2X]$.
- 2.23.** Um instrumento para medição de humidade é constituído por 3 componentes instaladas de forma independente. Todas as componentes têm a mesma probabilidade de avariar, igual a 0.1.
- a) Identifique e caracterize a variável aleatória que designa o número de componentes avariadas no referido instrumento.
 - b) Determine a probabilidade de duas ou mais componentes avariarem.
 - c) Numa encomenda de 10 dos instrumentos das alíneas anteriores para instalar em 10 locais diferentes, quantas componentes se espera virem a avariar?
- 2.24.** O número de turistas que procura uma unidade de alojamento local (AL) em cada dia é uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = 2$. As atuais instalações têm capacidade para alojar 3 hóspedes.
- a) Qual a probabilidade de, num dia, o AL ter que recusar hóspedes?

- b) Qual deveria ser a capacidade do AL para alojar todos os turistas que procuram alojamento em cerca de 95% dos dias?
 - c) Qual o número médio diário de turistas que procuram o AL?
 - d) Qual é o número mais provável de turistas que procuram o AL num dia?
 - e) Qual é a probabilidade de em 2 dias o AL ser procurado por 5 turistas?
 - f) Qual é o número esperado de turistas alojados por dia?
 - g) Qual é o número esperado de turistas recusados por dia?
- 2.25.** Uma empresa de aluguer de autocarros para excursões de longo curso dispõe de 5 veículos. Sabe-se, pela análise do seu comportamento, que a procura semanal de veículos segue uma distribuição de Poisson de média 3.
- a) Determine a probabilidade de, em certa semana, um dos autocarros não ser alugado.
 - b) Qual a probabilidade de, em duas semanas, serem procurados 6 veículos?
 - c) Determine o valor esperado do número de clientes que em certa semana não podem ser atendidos por já estarem alugados todos os autocarros.
- 2.26.** O número de peixes pescados por dia por um pescador é uma v.a. com distribuição de Poisson com média 10. Admita que o número de peixes pescados é independente de dia para dia.
- a) Determine a probabilidade de, num dado dia, o pescador pescar 2 peixes.
 - b) Qual a probabilidade de numa semana (7 dias) o número total de peixes pescados ser superior a 80?
 - c) Num ano de pesca (365 dias), qual é a probabilidade de haver mais de 50 dias em que são pescados exatamente 10 peixes em cada um dos dias?
- 2.27.** O número de ovos postos por segundo em certo aviário pode ser considerado uma v.a. X com distribuição de Poisson de valor médio 1.
- a) Mostre que $P[X = 0] = P[X = 1]$ e que para todo o $k > 1$ se tem $P[X = k] < P[X = k - 1]$. Comente.
 - b) Qual a probabilidade de num período de 5 segundos serem postos mais do que três ovos? Justifique.
 - c) Sabendo que numa dada região existem 40 aviários idênticos a este, qual a probabilidade de o número total de ovos postos por segundo nessa região ser inferior a 30? Justifique.
- 2.28.** O número de aviões que aterram, por hora, no período diário de operação num aeroporto de uma pequena cidade segue uma lei de Poisson. Estudos efectuados permitem afirmar que a probabilidade de, numa hora, aterrarem mais de 4 aviões é 0.56.
- a) Determine o valor do parâmetro da distribuição.
- Nota:** Se não resolveu esta alínea considere $\lambda = 5$.

- b) Sabendo que numa hora aterraram aviões no aeroporto, qual a probabilidade de nessa hora terem aterrado no máximo 5 aviões.
- c) Qual a probabilidade de no período diário de operação (18 h) de um dado dia aterrarem mais de 100 aviões? Justique os seus cálculos.
- 2.29.** Suponha que o tempo, em minutos, necessário para que um técnico afine cada componente de uma máquina numa linha de produção é bem descrito por uma variável aleatória X com distribuição $U(5; 10)$.
- a) Qual a probabilidade de que uma componente escolhida ao acaso:
- Tenha necessitado de mais de 7 minutos para ser afinada.
 - Tenha exigido ao técnico um tempo de afinação inferior a 9 minutos sabendo que aquele tempo foi superior a 7 minutos.
- b) Seja $Y = 10 + 5X$ o custo em euros de afinação de cada componente. Qual o custo esperado de afinação de uma componente escolhida ao acaso?
- 2.30.** Uma empresa agro-química fabrica mensalmente 90 toneladas de um dado produto. Sabendo que a procura mensal deste produto é uma variável aleatória aproximadamente normal de parâmetros $\mu = 80$ t e $\sigma = 10$ t, calcule:
- A probabilidade de a procura mensal do produto se situar entre 68 e 90 toneladas;
 - A probabilidade de haver num mês procura insatisfeita;
 - A produção necessária para que a probabilidade de haver procura mensal insatisfeita seja 0.025.
- 2.31.** Um grossista de distribuição de fruta recebe do produtor pêssegos de quatro categorias: extra, A, B e C. Da experiência anterior, sabe-se que o diâmetro de um pêssogo é uma variável aleatória com distribuição aproximadamente normal de média 64 mm e desvio padrão 3 mm. A classificação do referido fruto em função do seu diâmetro é a seguinte:

Categoria	Diâmetro (X) em mm
C	$X \leq 60$
B	$60 < X \leq 65$
A	$65 < X \leq 70$
Extra	$X > 70$

Atendendo aos custos de armazenamento e de distribuição, admite-se que o lucro líquido por tonelada é de 80 euros para a categoria extra, 50 euros para a categoria A, 10 euros para a categoria B e -5 euros para a categoria C.

Qual o lucro líquido esperado de um fornecimento constituído por uma tonelada de pêssegos?

- 2.32.** O comprimento da raiz principal de uma dada espécie de arbusto é bem modelado por uma distribuição normal de média 50 cm e desvio padrão 5 cm.

- a) Qual a probabilidade de um arbusto seleccionado ao acaso ter uma raiz principal com comprimento superior a 54 cm?
- b) Em 200 arbustos desta espécie, qual o número deles em que se espera que as raízes principais tenham comprimento superior a 54cm?
- c) Qual a probabilidade de a raiz principal de um arbusto seleccionado ao acaso ter comprimento entre 50 e 56 cm?
- d) Qual a probabilidade de a média dos comprimentos da raiz principal de 9 arbustos seleccionados ao acaso ser superior a 52cm?
- 2.33.** Admita que o conteúdo (em ml) de frascos de certo xarope segue uma distribuição normal de parâmetros $\mu = 200$ ml e $\sigma = 2$ ml.
- a) Qual a probabilidade de um frasco adquirido ao acaso ter menos de 195 ml de xarope?
- b) Se comprar 5 frascos, qual a probabilidade de ficar em casa com menos de 0.99 l de xarope?
- c) Num lote de 30 frascos qual a probabilidade de haver no máximo 5 com menos de 195 ml?
- 2.34.** Uma fábrica produz motores cujo tempo de vida é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros $\mu = 10$ anos e $\sigma = 2$ anos. A fábrica quer criar um período de garantia para os motores de forma a que não mais de 3% tenham de ser substituídos. Qual deverá ser o período de garantia máximo oferecido pela fábrica?
- 2.35.** Para efeitos de comercialização, um dado fruto é classificado de acordo com o seu tamanho. Considera-se que o diâmetro de uma peça deste fruto é uma variável aleatória com distribuição normal de desvio padrão igual a 5 cm e média μ cm. A classificação, em categorias, do referido fruto é a seguinte:

Categoria	Diâmetro (X) em cm
C1	$X \leq 6$
C2	$6 < X < 12$
C3	$X \geq 12$

- a) Sabendo que 30% dos frutos são da categoria C3, calcule o diâmetro médio dos frutos e a percentagem dos frutos das outras categorias.
- b) Se os frutos forem vendidos em embalagens de 6 unidades, qual a probabilidade de uma embalagem ter pelo menos 2 frutos da categoria C3?
- 2.36.** Duas empresas, *A* e *B*, fazem a abertura de furos para captação de água numa dada região. A empresa *A* cobra 3500€ por furo, independentemente da sua profundidade. A empresa *B* cobra 1000€ mais 25€ por cada metro de profundidade do furo. Na região em questão, a profundidade dos furos segue uma distribuição normal com média 75 m e desvio padrão 12 m e a profundidade é independente de furo para furo.
- a) Ao realizar um furo na referida região, qual é a probabilidade de este ter uma profundidade:
- i) superior a 90 m?

- ii) igual a 90 m?
- b) Caracterize, justificando, a distribuição dos preços, P_A e P_B da empresa A e B respectivamente. Qual é o preço médio de um furo realizado pela empresa B ?
- c) Qual é a probabilidade da empresa A cobrar mais do que a empresa B pela abertura de um furo?
- d) Sabendo que a empresa B abriu 10 furos num dado mês, qual a probabilidade de o preço de abertura desses furos ter sido superior ao valor que a empresa A cobraria se fosse ela a abrir os furos?
- 2.37.** Responda, **justificando convenientemente**, se são verdadeiras ou falsas as afirmações nas seguintes alíneas. Seja X uma variável aleatória.
- a) Se $X \sim \text{Poisson}(3)$ então $P[2 < X < 3] = 0$.
- b) Se $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ então $P[X = 0] = 1/2$.
- c) Seja $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y = 2X$. Então $Y \sim \mathcal{N}(0, 4)$.
- 2.38.** Um produto pesa em média 10 g com desvio padrão de 2 g. Este produto é embalado em caixas com 50 unidades cada. Sabe-se que as caixas vazias pesam em média 500 g com desvio padrão de 25 g. Admita que as variáveis peso do produto e da caixa vazia são independentes com distribuição normal.
- a) Qual é a probabilidade de numa caixa encontrar no máximo 10 unidades do referido produto com peso inferior a 8 g cada?
- b) Qual é a probabilidade de uma caixa cheia pesar mais do que 1050 g?
- 2.39.** Um determinado modelo de avião pode transportar uma carga máxima (passageiros e bagagens) de 9000 kg. Admita que o peso da bagagem de um passageiro é uma variável aleatória com distribuição $N(18, 5)$, que o peso de um passageiro-homem é uma variável aleatória com distribuição $N(70, 10)$ e que o peso de um passageiro-mulher é uma variável aleatória com distribuição $N(60, 10)$.
- a) Qual é o peso da bagagem de um passageiro que é excedido por 20% dos passageiros, no máximo?
- b) Considere um casal (homem e mulher) que entra no avião. Qual a probabilidade de o peso da mulher ser superior ao do homem? Que hipóteses tem de admitir para responder a esta questão?
- c) Num determinado voo a lotação do avião está completa com 80 homens e 20 mulheres, que levam a respectiva bagagem. Qual a probabilidade de o avião não poder partir por excesso de carga?
- d) A companhia pratica a cobrança de uma taxa para bagagens com peso superior a 20 kg. Havendo 60 passageiros num voo, qual é a probabilidade de que mais de 10 passageiros paguem a referida taxa.

- 2.40.** Num restaurante, a procura semanal (em litros) de uma determinada marca de cerveja segue uma distribuição normal com desvio padrão 4 litros. Sabe-se que em 50% das semanas a procura é inferior a 50 litros.
- Determine o valor médio e a variância da variável aleatória que designa a procura semanal de cerveja daquela marca.
 - Calcule a probabilidade de, numa semana, a procura ser superior a 60 litros.
 - Qual deverá ser a quantidade de cerveja que deve existir em cada semana de modo que a probabilidade de haver ruptura de stock seja igual a 0.015?
 - Sendo cada litro de cerveja vendido a 5 euros, caracterize a lei da venda mensal (4 semanas) de cerveja, admitindo que em cada semana não se esgota o stock.
- 2.41.** A produção semanal de uma plantação de bananas é bem modelada por uma variável aleatória com distribuição normal de média 5 t e desvio padrão 2 t. Admita que a produção é independente de semana para semana.
- Numa semana escolhida ao acaso, qual a probabilidade de a produção de bananas ser inferior a 3 t? E superior a 7 t?
 - A plantação tem despesas fixas semanais no valor de 2000€. O produtor vende as bananas a 500€ por tonelada. Qual a probabilidade de, numa dada semana em que toda a produção é escoada, o valor da venda ser inferior às despesas fixas? Justifique.
 - Qual a probabilidade de num mês (4 semanas) se conseguir satisfazer uma encomenda de 23 t de bananas? Justifique.
 - Determine a probabilidade de, em 8 semanas escolhidas ao acaso, haver no máximo uma em que a produção foi inferior a 3 t.
- 2.42.** O concentrado de tomate é vendido em bisnagas que permitem uma menor redução da exposição ao ar. O diâmetro de abertura destas bisnagas é uma variável aleatória, X , com distribuição normal de parâmetros $\mu = 5$ mm e $\sigma = 0.6$ mm.
- Calcule a probabilidade de, numa bisnaga escolhida ao acaso, o diâmetro de abertura medir
 - menos de 3.5 mm
 - 5 mm.
 - Considere uma amostra de 100 bisnagas escolhidas ao acaso. Determine a probabilidade de:
 - a média dos diâmetros de abertura ser superior a 5.1 mm.
 - 3 bisnagas terem diâmetro de abertura inferior a 3.5 mm.
 - O custo (em u.m. adequadas) de fabrico de uma bisnaga depende do diâmetro da abertura e pode considerar-se dado por $C = 20 + 2X$. Caracterize a lei do custo de fabrico de cada bisnaga.
- 2.43.** Suponha que o peso de um pacote de farinha é uma variável aleatória que se admite ter valor médio 1 kg e desvio padrão 0.05 kg. Pretende-se arrumar 99 pacotes numa prateleira que suporta 100 kg. Qual o risco de a prateleira desabar? Justifique.

- 2.44.** Numa fábrica de rações produz-se diariamente 100 unidades de um dado tipo de ração. A quantidade de uma certa matéria prima incorporada em cada unidade é uma variável aleatória de valor médio 75g e variância 25g^2 . Admita a independência entre as quantidades de matéria prima necessárias para cada unidade.
- a) Qual a probabilidade, aproximada, de a quantidade média de matéria prima por unidade, usada num dado dia, ser superior a 74g?
 - b) Determine a percentagem de dias em que a quantidade de matéria prima usada não excede 7.6kg.
 - c) Fazem-se lotes de 100 unidades de ração. Sabe-se que o custo da matéria prima é de 5 cêntimos/g. Qual deve ser o valor a pedir na venda de cada lote de modo a cobrir o custo da matéria prima em 95% das situações?
- 2.45.** O peso médio dos indivíduos duma certa espécie de bivalves é 31 g e o respectivo desvio padrão é 2.4 g. Recolhe-se uma amostra aleatória de 100 indivíduos desta espécie.
- a) Qual a probabilidade, aproximada, de a média da amostra ser inferior a 30 g?
 - b) Qual a probabilidade, aproximada, de a média da amostra estar compreendida entre 30 e 31 g?
 - c) Qual a probabilidade, aproximada, de o peso total da amostra ser superior a 3150 g?
- 2.46.** Um filtro de ar é instalado para remover partículas sólidas numa zona de uma empresa. O número de partículas capturadas numa amostra de ar segue uma distribuição de Poisson com valor médio 6.
- a) Calcule a probabilidade de numa amostra de ar serem capturadas mais de 8 partículas.
 - b) Em duas amostras de ar recolhidas de forma independente, qual é a probabilidade de no total serem capturadas 13 partículas?
 - c) Na empresa estão instalados, em locais distintos, 40 filtros de ar idênticos. Para responder às perguntas que se seguem, considere que cada filtro atua sobre uma única amostra de ar.
 - i) Determine a probabilidade de a média do número de partículas capturadas por filtro de ar ser inferior a 7.
 - ii) Qual é a probabilidade de serem capturadas mais de 8 partículas em pelo menos 5 filtros?

Soluções de alguns Exercícios – Parte B

2.1.

a) Espaço de resultados:

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), (3,1), (3,2), \dots, (3,6), (4,1), \dots, (5,1), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$$

$$\#\Omega = 36$$

b) $6/36 = 1/6$

c)

x_i	-1	0	1
$P[X = x_i]$	15/36	6/36	15/36

2.2.

x_i	0	2
$P[X = x_i]$	2/5	3/5

2.3. a) $E[X] = 0.3 \quad Var(X) = 2.01.$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \leq x < -1 \\ 0.4 & -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.7 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2. \end{cases}$$

c) $3/7.$

d)

$y_i = x_i^2$	0	1	4
$P[Y = y_i]$	0.1	0.5	0.4

2.4.

a)

x_i	0	1	2	3	4
$P[X = x_i]$	0.1	0.2	0.2	0.4	0.1

b) ≥ 3

c) $D = |X - 2|$

d_i	0	1	2
$P[D = d_i]$	0.2	0.6	0.2

2.5. a) $p = 1/6$ e $k = 1.$

b) $8/9.$

c) $Y = X^2 - 2$

y_i	-2	-1	2
$P[Y = y_i]$	3/6	2/6	1/6

2.6. a) $a = 3.$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$

c) $\chi_{0.5} = \sqrt[3]{0.5}$ e $E[X] = 3/4$

d) $\sqrt[3]{0.95}$.

- 2.8.** a) Se X é v.a. contínua então terá que ter-se $F(x)$ contínua
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} F(x) = 1$, isto é,
 $a \cdot 0 + b = 0$ e $a \times 2 + b = 1 \Rightarrow b = 0$ e $a = \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < x < 2 \\ 0 & x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \end{cases}$

c) $F(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \chi_{0.25} = \frac{1}{2}$.

d) $P\left[X < 1 | X \geq \frac{1}{2}\right] = \frac{P\left[\frac{1}{2} \leq X < 1\right]}{P\left[X \geq \frac{1}{2}\right]} = \frac{1}{3}$

e) i) $E(X) = 1$; $Var[X] = \frac{1}{3}$

ii) $\frac{\log(2)}{2}$, 5, $\frac{4}{3}$ e 3

2.9. a) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2/2 & 0 \leq x < 1 \\ x - 1/2 & 1 \leq x < 1.5 \\ 1 & x \geq 1.5. \end{cases}$

b) $P[X > 1 | X > 1/2] = 4/7$

c) $E[X] = 23/24$ centenas de kg, i.e., o valor médio é aprox. 95.93 kg. A mediana M é tal que
 $F(M) = 1/2 \Leftrightarrow M = 1$. Portanto a mediana é 100kg.

d) i) $E[Y] = 275/12$

ii) $P[Y \geq 0] = 7/8$.

- 2.10.** a) $b = 3$.

b) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{x}\right) & 1 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$.

c) $\chi_{0.5} = \frac{3}{2}$.

d) $E[Y] = C_0 + C_1 \left(\frac{3}{2} \ln 3\right)$.

- 2.11.** a) $F(a) = 0 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\frac{a-2}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{a-2}{3} = 0 \Leftrightarrow a = 2$.

b)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{x-2}{3}\right) & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

c)

$$1 - \exp\left(-\frac{M-2}{3}\right) = 0.5 \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{M-2}{3}\right) = 0.5 \Leftrightarrow M = 2 - 3 \ln(0.5) = 4.08$$

d) 0.55156

e)

i) 0.3558

ii) 0.018395

2.12. a)

y_j	6	7	8	9	10
$p_{.j}$	0.25	0.2	0.2	0.25	0.1

b) As v.a.'s discretas X e Y são independentes sse $\forall(i, j) p_{ij} = p_{i.} p_{.j}$. Observe-se, por exemplo, que $p_{11} \neq p_{1.} p_{.1}$, pois $p_{11} = P[X = 2, Y = 6] = 0.05$, $p_{1.} = P[X = 2] = 0.25$ e $p_{.1} = P[Y = 6] = 0.25$, portanto X e Y não são independentes.

c) $E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 3 + 7.75 = 10.75$.

d) Designemos por W a variável $(X|Y = 7)$. A distribuição de probabilidades de W é

w_i	2	3	4
$P[W = w_i]$	0.2	0.5	0.3

2.13. a)

y_j	0	1	2	3
$p_{.j}$	0.3	0.4	0.2	0.1

b) $a = 0.18$ e $b = 0.1$.

c) $E[Y|X \geq 2] = 29/15$

d) Por definição as variáveis aleatórias X e Y são independentes se e só se $p_{ij} = p_{i.} \times p_{.j} \quad \forall(i, j)$. Mas a igualdade falha, por exemplo, em (1,4), logo as variáveis X e Y não são independentes.

2.14. a) $P(X + Y \leq 2) = 0.08$

b) $P(X = Y) = 0.13$

c) $\rho = 0$. As variáveis podem ser independentes.

d) $Z = \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.01 & 0.07 & 0.18 & 0.31 & 0.31 & 0.12 \end{cases}$

e) $P(X \geq 1|Y = 2) = 0.9$

2.16 a) Sabe-se que $p_i \geq 0$ e $\sum p_i = 1$, donde resulta $p = 1/3$.

b) $\text{Var}[X] = \frac{5}{12}$, então $\text{Var}[3X - 2] = \frac{45}{12}$.

c) i) $P[X = y_i] : \begin{cases} P[X = 0] = \frac{1}{2} \\ P[X = 1] = \frac{1}{2} \end{cases}$

Tabela conjunta:

$y_j \backslash x_i$	-1	0	1
0	1/24	4/24	7/24
1	1/24	4/24	7/24

i) $P[Y > X] = \frac{1}{4}$

iii) $\text{Var}[X - Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$, pois X e Y são independentes ($\text{COV}[X, Y] = 0$).

Tem-se $\text{Var}[X - Y] = \frac{1}{2}$.

2.17. a) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 3x^2 - 2x^3 & , 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & , x > 1. \end{cases}$

b) 0.5

c) 0.5

d) i) 0.5 ii) 0.5

e) i) $\frac{23}{60}$ ii) -0.05

2.18. a) $E[X] = 1.5$; $\text{Var}[X] = 1.25$

b) $Y \sim \text{Unif.Discreta}(1, 3, 5, 7)$

Nota:

As funções utilizadas no cálculo de massa de probabilidade, função distribuição cumulativa ou quantis de distribuições estão disponíveis na biblioteca `scipy.stats`

```
from scipy.stats import binom
from scipy.stats import poisson
from scipy.stats import norm
```

2.19. a) $X \sim B(20; 0.9)$.

b) $0.9568 \text{ round}(1 - \text{binom.cdf}(15, 20, 0.9), 4) \rightarrow 0.9568$

c) $\approx 1 \text{ round}(1 - \text{binom.cdf}(10, 20, 0.9), 5) \rightarrow 0.99999$

e) 110

f) $0.9568 \text{ round}(1 - \text{binom.cdf}(15, 20, 0.9), 4) \rightarrow 0.9568$

2.20. a) $X \sim B(n, 0.2)$.

b) i) $0.2309 \text{ round}(\text{binom.pmf}(2, 15, 0.2), 4) \rightarrow 0.2309$

ii) $0.9958 \text{ round}(\text{binom.cdf}(7, 15, 0.2), 4) \rightarrow 0.9958$

c) O número mínimo de cobaias a utilizar na experiência deverá ser 14.

- 2.21.** a) $X \sim \mathcal{B}(10, 0.05)$; $P[X = x] = \binom{10}{x} 0.05^x \times 0.95^{10-x}$, com $x = 0, 1, \dots, 10$
 b) $0.3152 \text{ round}(\text{binom.pmf}(1, 10, 0.05), 4) \rightarrow 0.3151$
 c) $8.61\% \text{ dos clientes } \text{round}(1 - \text{binom.cdf}(1, 10, 0.05), 4) \rightarrow 0.0861$

- 2.22.** a) $X \sim \mathcal{B}(2, 0.1)$ e Y v.a. com distribuição uniforme discreta com valores 0 e 1.
 A função massa de probabilidade de X (leitura na tabela ou cálculo de $P[X = x] = \binom{2}{x} 0.1^x 0.9^{2-x}$, $x = 0, 1, 2$, ou comando Python `print(binom.pmf(range(0, 3), 2, 0.1))`) e de Y é, respetivamente:

x_i	0	1	2
p_i	0.81	0.18	0.01

y_i	0	1
p_i	1/2	1/2

b)

$$E[Y] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad E[Y^2] = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Var}[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

- c) Seja $Z = 2Y + 1$ uma v.a. cuja função massa de probabilidade é:

z_i	1	3
p_i	1/2	1/2

Portanto, a v.a. Z toma um número finito de valores (dois) com igual probabilidade, logo é uniforme discreta.

- d) X e Y variáveis independentes; como são v.a.'s discretas tem-se $p_{ij} = p_i p_j$, $\forall (i, j)$.

- i) Então a distribuição de probabilidade conjunta do par (X, Y) é:

$X \backslash Y$	0	1	p_i
0	0.405	0.405	0.81
1	0.09	0.09	0.18
2	0.005	0.005	0.01
p_j	0.5	0.5	1

- ii) Se X e Y são v.a.'s independentes $\Rightarrow \text{Cov}[X, Y] = 0$.

iii)

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y - 2X] &= \text{Var}[Y] + \text{Var}[2X] - 2\text{Cov}[Y, 2X] \\ &= \text{Var}[Y] + 4\text{Var}[X] - 4\text{Cov}[Y, X]. \end{aligned}$$

Como $\text{Cov}[Y, X] = 0$ pela independência, e

$$\text{Var}[Y] = \frac{1}{4}, \quad \text{Var}[X] = 2 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.18,$$

tem-se

$$\text{Var}[Y - 2X] = 0.25 + 0.72 = 0.97.$$

- 2.23.** a) X é a variável aleatória que designa o nº de componentes avariadas no instrumento (instaladas de forma independente). $X \sim B(3, 0.1)$.

- b) $P[X \geq 2] = 1 - P[X \leq 1] = 0.028$ `round(1-binom.cdf(1, 3, 0.1), 4) → 0.028`
- c) Y : v.a. que designa o número de componentes avariadas em 10 instrumentos, $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ em que $X_i \sim B(3, 0.1)$. $E[Y] = 10 \times E[X] = 10 \times 3 \times 0.1 = 3$.
- 2.24.** a) 0.1429 `round(1-poisson.cdf(3, 2), 4) → 0.1429`
- b) A capacidade deveria ser 4
`print(poisson.ppf(0.95, 2)) → 5.0`
`print(poisson.ppf(0.94, 2)) → 4.0`
- c) 2.
- d) 1 ou 2 `print(poisson.pmf(range(0, 5), 2)) →`
`[0.13533528 0.27067057 0.27067057 0.18044704 0.09022352]`
- e) 0.156 `print(round(poisson.pmf(5, 4), 4)) → 0.1563`
- f) 1.782
- g) 0.218
- 2.25.** a) 0.1680 `print(round(poisson.pmf(4, 3), 4)) → 0.168`
- b) 0.1606 `print(round(poisson.pmf(6, 6), 4)) → 0.1606`
- c) 0.1346
- 2.26.** a) `print(poisson.pmf(10, 10)) → 0.12511`
- b) `print(1-poisson.cdf(80, 70)) → 0.10658`
- c) `1-binom.cdf(50, 365, 0.12511) → 0.21965`
- 2.27.** a) $P[X = 0] = \frac{e^{-1}1^0}{0!} = e^{-1}$; $P[X = 1] = \frac{e^{-1}1^1}{1!} = e^{-1}$.
Para $k > 1$, $P[X = k] - P[X = k - 1] = \frac{e^{-1}}{k!} - \frac{e^{-1}}{(k-1)!} < 0$. Então pode-se dizer que $P[X = k]$ é decrescente, sendo estritamente decrescente para $k > 1$.
- b) Considerando o n° de ovos postos por segundo independente do n° de ovos postos noutro segundo (disjunto do anterior) e sendo $Y = \sum_{i=1}^5 X_i$, representando o n° de ovos postos em 5 segundos, $Y \sim \mathcal{P}(5)$. Pretende-se $P(Y > 3) = 1 - F_Y(3)$.
`print(round(1-poisson.cdf(3, 5), 4)) → 0.735`
- c) Seja W a v.a. que designa o número de ovos postos, por segundo, em 40 aviários idênticos. $W = \sum_{i=1}^{40} X_i$ (X_i o número de ovos postos por segundo no i -ésimo aviário), $W \sim \mathcal{P}(40)$. Pretende-se $P(W < 30) = 1 - F_W(29)$.
`print(round(poisson.cdf(29, 40), 4)) →  $P(W < 30) = 0.0432$`
- 2.29.** a) 3/5
- b) 2/3
- c) 47.5 euros
- 2.30.** a) 0.7262
`print(round(norm.cdf(90, 80, 10) - norm.cdf(68, 80, 10), 4)) → 0.7263`

- b) 0.1587 `print(round(1-norm.cdf(90, 80, 10), 4)) → 0.1587`
 c) 99.6 t `print(round(norm.ppf(1-0.025, 80, 10), 2)) → 99.6`

2.31. 24.092 euros

```
print(norm.cdf(60, 64, 3)) # P(A)=0.09121121972586788
print(norm.cdf(65, 64, 3)-norm.cdf(60, 64, 3)) # P(B)=0.5393474400923685
print(norm.cdf(70, 64, 3)-norm.cdf(65, 64, 3)) # P(C)=0.34669120823358446
print(1-norm.cdf(70, 64, 3)) # P(Extra)=0.02275013194817921
```

2.32. a) Se X comprimento da raiz principal

$$P[X > 54] = 0.21186$$

- b) Y – conta o nº de arbustos cuja raiz principal tem comprimento superior a 54 cm;

$$Y \sim \text{Binomial}(200, 0.21186) \quad E[Y] = 42.372$$

- c) $P[50 < X < 56] = 0.38493$

- d) $\bar{X} \sim \text{Normal}(50, 5/3)$; $P[\bar{X} > 52] = 0.11507$

2.33. a) 0.0062 `print(round(norm.cdf(195, 200, 2), 4)) → 0.0062`

- b) 0.0125 `print(round(norm.cdf(990, 5*200, 2*5**0.5), 4)) → 0.0127`

- c) ≈ 1 `print(binom.cdf(5, 30, 0.0062)) → 0.9999999703171922`

2.34. 6.24 anos `print(round(norm.ppf(0.03, 10, 2), 3)) → 6.238`

2.35. a) Diâmetro médio dos frutos: 9.4 cm; 24.8% e 45.2% de frutos C1 e C2, respectivamente.

- b) 0.58.

2.38. X – peso em gramas de cada unidade do produto; $X \sim \text{Normal}(10, 2)$

- a) Y – v.a. que conta o nº de unidades em 50, com peso menor a 8 g; seja $p = P[X < 8] = 0.1586$.

Então $Y \sim \text{Binomial}(50, 0.1586)$, pretende-se $P[Y \leq 10]$

$$\text{print(round(binom.cdf(10, 50, 0.1586), 4)) → 0.8409}$$

- b) Seja V o peso da caixa vazia $V \sim \text{Normal}(500, 25)$

Seja T o peso da caixa com as 50 unidades $T \sim \text{Normal}(1000, \sqrt{25^2 + 50 * 2^2})$, supondo-se que as v.a.s envolvidas são independentes.

$$P[T > 1050] = 0.041$$

2.40. X – procura semanal em litros de cerveja; $X \sim \text{Normal}(\mu, 4)$

- a) $\mu = 50$ litros, $\sigma^2 = 16$ litros²

- b) $P[X > 60] = 0.0062$ `print(round(1-norm.cdf(60, 50, 4), 4)) → 0.0062`

- c) Pede-se x_0 : $P[X > x_0] = 0.015$ $x_0 = 58.68$ litros

$$\text{print(round(norm.ppf(1-0.015, 50, 4), 4)) → 58.684}$$

- d) V , v.a. valor da venda $V = 5 \times (X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ em euros.

$$V \sim \text{Normal}(5 \times (4 \times 50), \sqrt{5^2 \times (4 \times 16)})$$

- 2.41.** a) Seja X a v.a. que representa a produção semanal (em t) de bananas; $X \sim \mathcal{N}(5, 2)$. $P[X < 3] = 0.1587$. Como X é simétrica relativamente a $\mu = 5$; $P[X > 7] = P[X < 3] = 0.1587$.
- b) O valor da venda é $500X$. $P[500X < 2000] = 0.3085$.
- c) Seja S_4 a v.a. que representa a produção de bananas (em t) em 4 semanas, $S_4 = \sum_{i=1}^4 X_i$ em que $X_i \sim \mathcal{N}(5, 2)$ e X_i independentes ($i = 1, \dots, 4$).
 $S_4 \sim \mathcal{N}(4 \times 5, 2 \times \sqrt{4}) \Leftrightarrow S_4 \sim \mathcal{N}(20, 4)$. $P[S_4 \geq 23] = 0.2266$.
- d) Seja Y a v.a. que representa o número de semanas, em 8 escolhidas ao acaso, em que a produção foi inferior a 8 t; $Y \sim B(8, p)$ em que $p = P[X < 3]$ calculada em a). $P[Y \leq 1] = 0.6297$
- 2.43.** O risco da prateleira desabar quando se empilham os 99 sacos é baixo, cerca de 2.2%.
- 2.44.** a) 0.9773
b) 0.9773
c) Deve pedir-se 379.11 euros
- 2.45.** a) $\bar{X}_{100} \sim \mathcal{N}(31, 2.4/\sqrt{100})$
 $P[\bar{X}_{100} < 30] \simeq 1.5454 \times 10^{-5}$

```
print(norm.cdf(30, 31, 0.24))
```

 $\rightarrow$ 1.5454296882295967e-05
- b) $P[30 < \bar{X}_{100} < 31] \simeq \Phi(0) - \Phi(-1/0.24) \simeq 0.5$
- c) $S_{100} \sim \mathcal{N}(31 \times 100, 2.4 \times \sqrt{100})$
 $P[S_{100} > 3150] \simeq 1 - \Phi((3150 - 3100)/24) = 0.0186$

```
print(1-norm.cdf(3150, 3100, 24))
```

 $\rightarrow$ 0.018610425189886315
- 2.46.** a)

```
print(1-poisson.cdf(8, 6))
```

 $\rightarrow$ 0.15276250601543884
- b)

```
print(poisson.pmf(13, 12))
```

 $\rightarrow$ 0.105570383547182
- c)i) $\bar{X}_{40} \sim \mathcal{N}(6, \sqrt{6/40})$. Pedese $P[\bar{X}_{40}] < 7$.

```
print(norm.cdf(7, 6, math.sqrt(6/40)))
```

 $\rightarrow$ 0.9950883627462404
- c)ii) $Y \sim \mathcal{B}(40, 0.15276)$. Pedese $P[Y \geq 5]$.

```
print(1-binom.cdf(4, 40, 1-poisson.cdf(8, 6)))
```

 $\rightarrow$ 0.7519463617471205