

Parte B

Introdução à Teoria da Probabilidade

- Experiência aleatória.
- Espaço de resultados associado a uma experiência aleatória (Ω).
- Acontecimento aleatório ($A \subset \Omega$).
- Probabilidade de um acontecimento aleatório A , $P(A)$.
- Acontecimento impossível $\emptyset$, $P(\emptyset) = 0$.
Note que um acontecimento de probabilidade nula pode não ser impossível (?)
- Acontecimento certo Ω , $P(\Omega) = 1$.
- Probabilidade condicional de A sabendo que se realizou B ,
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0.$$

Teoria da Probabilidade | Exemplo

- Experiência aleatória: lançar 2 dados equilibrados com as faces numeradas de 1 a 6 e observar o valor da face que fica voltada para cima em cada um.
- Espaço de resultados: $\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$.
- Acontecimento aleatório: os valores das duas faces são iguais, $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.
- Probabilidade de um acontecimento aleatório A : $P(A) = \frac{6}{36}$.

Variável Aleatória

Uma variável aleatória permite associar valores numéricos aos resultados de uma experiência aleatória.

Por exemplo, na experiência aleatória descrita atrás pode-se associar a cada par de resultados a soma das faces dos dois dados lançados ao acaso.

Definição

Designa-se **variável aleatória (v.a.)** e costuma representar-se por X , uma função com domínio Ω e contradomínio em $\mathbb{R}$, que associa cada elemento $\omega \in \Omega$ a um número $x \in \mathbb{R}$ i.e.,

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = x$$

Variável aleatória

Uma variável aleatória diz-se **discreta** se assume um conjunto finito ou infinito numerável (contável) de valores.

Exemplos:

- soma das faces viradas para cima no lançamento de dois dados;
- número de pessoas na fila para a cantina do ISA às 12h30 de um dia selecionado ao acaso.

Uma variável aleatória diz-se **contínua** se pode tomar qualquer valor real num dado intervalo, que pode ser a reta real

Exemplos:

- o peso de um frango com 2 meses de idade selecionado ao acaso num bando de frangos;
- a espessura da cortiça recém extraída à altura de 1,30m numa árvore selecionada ao acaso.

A probabilidade de uma variável aleatória X tomar um conjunto de valores é a probabilidade do acontecimento de Ω cuja transformação por X originou o conjunto de valores.

Por exemplo, na experiência aleatória que consiste em escolher ao acaso um frango, o espaço de resultados Ω é o conjunto de todos os frangos com 2 meses de idade. Considerando a v.a. X que representa o peso do frango, a probabilidade de o peso de um frango estar entre 1 kg e 2 kg, $P[1 < X < 2]$, é a probabilidade de escolher ao acaso um frango ω cujo peso $X(\omega)$ está entre 1 e 2 kg.

V.a. discreta | função massa de probabilidade

Uma forma de definir uma v.a. discreta consiste em identificar os valores possíveis para essa variável assim como a probabilidade de a v.a. tomar cada um desses valores.

Seja X uma v.a. tomando k valores, $x_1, \dots, x_k$, cada um deles com probabilidade $p_1, \dots, p_k$, respetivamente, i.e.,
 $p_i = P[X = x_i]$, $i = 1, \dots, k$.

Definição

Chama-se **função massa de probabilidade** da v.a. X à **aplicação** que a cada valor x_i faz corresponder um valor p_i , tal que

$$p_i = P[X = x_i]$$

A **função massa de probabilidade** satisfaz:

$$p_i \geq 0, i = 1, \dots, k \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

V.a. discreta | distribuição de probabilidade

Designa-se **distribuição de probabilidade** da v.a. X ao conjunto de pares (x_i, p_i) , $i = 1, \dots, k$

Habitualmente a distribuição de probabilidade (**lei**) da v.a. X dispõe-se na forma:

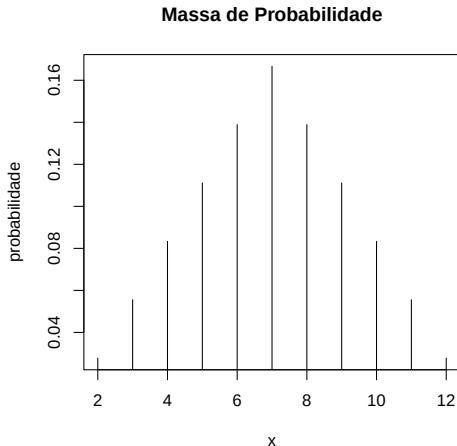
$$X = \left\{ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{c|cccc} x_i & x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ \hline P[X = x_i] & p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{array}$$

Por exemplo, a v.a. X que representa a soma das faces viradas para cima no lançamento de dois dados equilibrados tem a seguinte distribuição de probabilidade (verificar)

$$X = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{array} \right.$$

V.a. discreta | distribuição de probabilidade

A distribuição de probabilidade de uma v.a. discreta representa-se graficamente através de um diagrama de barras. No exemplo acima tem-se



Exemplo 5

O número de aparelhos de micro-ondas vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

- a) Verifique que se trata de uma distribuição de probabilidade.
- b) Determine $P[1 \leq X \leq 3]$. Interprete esta probabilidade.
- c) Num dia em que é vendido pelo menos 1 micro-ondas, qual é a probabilidade de serem vendidos mais de 2?

Exemplo 5 (continuação)

Resolução:

X é uma v.a. discreta que toma apenas cinco valores ($k = 5$).

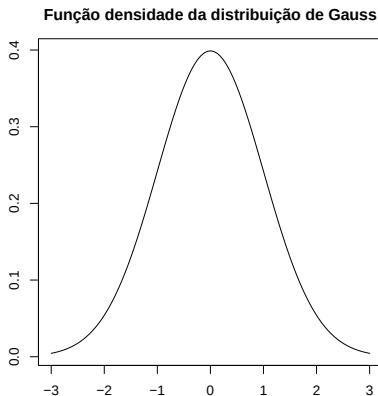
- a) Basta verificar que cada $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 5$ e $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$.
- b) $P[1 \leq X \leq 3] = P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.6$.
Em 60% dos dias, são vendidos 1, 2 ou 3 aparelhos de micro-ondas.
- c)
$$P[X > 2 | X \geq 1] = \frac{P[X > 2 \wedge X \geq 1]}{P[X \geq 1]} = \frac{P[X > 2]}{1 - P[X < 1]} = \frac{0.1 + 0.1}{1 - 0.3} = \frac{2}{7}$$

Os Exercícios 2.1 e 2.2 têm outros exemplos de variáveis aleatórias discretas. Resolva como TPC.

V.a. contínua | função densidade

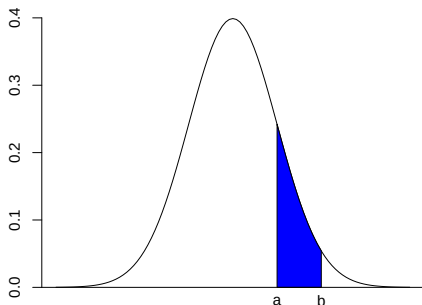
Contrariamente às variáveis discretas, as variáveis contínuas podem assumir qualquer valor numérico real dentro de um determinado intervalo. Entre quaisquer dois valores de uma variável aleatória contínua X , podem ocorrer infinitos outros valores.

Uma v.a. contínua pode definir-se através de uma **função densidade**, representada graficamente por uma curva em que a ordenada de cada ponto é a densidade de probabilidade desse ponto. Note-se que a altura correspondente ao valor 2.4 **não é** a probabilidade de X tomar o valor 2.4.



V.a. contínua | função densidade

Como uma v.a. contínua pode tomar infinitos valores num intervalo, a **probabilidade de tomar um único valor é zero**.



A **probabilidade** de uma v.a. contínua tomar valores entre a e b é a **área** abaixo da curva da sua função densidade entre a e b , ou seja é o **integral** da função densidade entre a e b .

Como a probabilidade de a v.a. tomar valores reais é 1, a **área abaixo da curva terá que ser 1**.

Definição

Uma **função densidade de probabilidade** ou apenas **função densidade** é uma função real de variável real, habitualmente designada por f , que verifica as seguintes condições:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Sendo X uma v.a. **contínua** com função densidade f ,

$$P[a < X < b] = P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x) dx$$

Exemplo 6

O tempo de vida (em anos) de um dado equipamento pode ser modelado por uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- a) Mostre que f é de facto uma função densidade.
- b) Qual a probabilidade de esse equipamento durar entre 1 e 3 anos?

Exemplo 6

Resolução:

a) Basta verificar que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx \\&= \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt \\&= \lim_{y \rightarrow -\infty} \int_y^0 0 dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{5} e^{-t/5} dt \\&= 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-e^{-t/5} \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x/5} + e^0 = 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}P[1 < X < 3] &= \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \frac{1}{5} e^{-x/5} dx \\&= \left[-e^{-x/5} \right]_1^3 = -e^{-3/5} - (-e^{-1/5}) \approx 0.2699\end{aligned}$$

Variável aleatória | função distribuição cumulativa

Uma forma alternativa de definir uma variável aleatória X consiste na utilização de uma função real de variável real, cujo contradomínio é o intervalo $[0, 1]$, que associa a todo o $x \in \mathbb{R}$ a **probabilidade de X tomar qualquer valor inferior ou igual a x** .

Definição

A **função distribuição cumulativa** associada à variável aleatória X representa-se por F ou F_X e define-se como

$$F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \quad \text{tal que} \quad F(x) = P[X \leq x].$$

O conhecimento da f.d.c. $F(\cdot)$ permite calcular qualquer probabilidade:

- $P[X \leq b] = F(b)$ (por definição);
- $P[X < b] = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b^-)$;
- $P[X \geq a] = 1 - P[X < a] = 1 - F(a^-)$;
- $P[X > a] = 1 - P[X \leq a] = 1 - F(a)$;
- $P[X = a] = P[X \leq a] - P[X < a] = F(a) - F(a^-)$;
- $P[a < X \leq b] = P[X \leq b] - P[X \leq a] = F(b) - F(a)$;
- $P[a < X < b] = P[X < b] - P[X \leq a] = F(b^-) - F(a)$;
- $P[a \leq X \leq b] = P[X \leq b] - P[X < a] = F(b) - F(a^-)$;
- $P[a \leq X < b] = P[X < b] - P[X < a] = F(b^-) - F(a^-)$.

Variável aleatória | f.d.c. e massa de probabilidade

Se X é uma v.a. **discreta** com distribuição de probabilidade (x_i, p_i) , $F(x)$ é a **soma** das probabilidades de X tomar qualquer valor inferior ou igual a x , para todo o número real x .

X variável aleatória **discreta**

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i] = \sum_{x_i \leq x} p_i, \forall x \in \mathbb{R}.$$

e

$$p_i = P[X = x_i] = F(x_i) - F(x_i^-), \forall i = 1, 2, \dots$$

Exemplo 5 (continuação)

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

- d) Determine a função de distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.
- e) Determine $P[1 \leq X \leq 3]$ utilizando a função da alínea anterior.

Resolução:

X é uma v.a. discreta que toma apenas cinco valores.

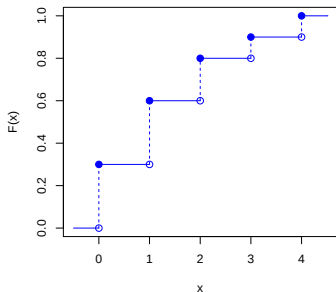
- d) Para determinar a f.d.c. é necessário calcular

$$P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i], \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 5 (continuação)

- se $x < 0$, $F(x) = 0$
- se $0 \leq x < 1$, $F(x) = 0.3$
- se $1 \leq x < 2$, $F(x) = 0.3 + 0.3 = 0.6$
- se $2 \leq x < 3$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 = 0.8$
- se $3 \leq x < 4$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.1 = 0.9$
- se $x \geq 4$, $F(x) = 0.3 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.1 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.3, & 0 \leq x < 1 \\ 0.6, & 1 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$



Exemplo 5 (continuação)

No caso de uma variável aleatória **discreta** a função distribuição cumulativa é uma **função em escada**, onde os pontos de salto são os valores que a variável assume.

$$\text{e)} \quad P[1 \leq X \leq 3] = F(3) - F(1^-) = F(3) - F(0) = 0.9 - 0.3 = 0.6.$$

Variável aleatória | f.d.c. e função densidade

Se X é uma v.a. **contínua** com função densidade f , $F(x)$ é o **integral** indefinido (e impróprio) da função densidade entre $-\infty$ e x , para todo o número real x .

X variável aleatória **contínua**

$$F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

e

$$f(x) = F'(x)$$

quando existe derivada; quando não existe pode-se arbitrar $f(x) = 0$.

Nota:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx = F(b) - F(a) \\ &= P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) = P(a < X < b), \forall a < b. \end{aligned}$$

Exemplo 6 (continuação)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- c) Determine a função de distribuição cumulativa de X e represente-a graficamente.
- d) Qual a probabilidade de esse equipamento durar entre 1 e 3 anos? Utilize o resultado da alínea anterior.

Resolução:

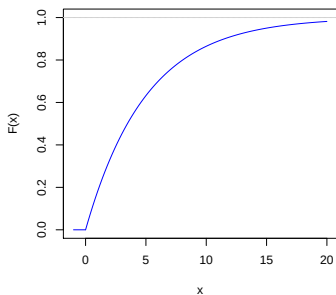
X é uma v.a. contínua.

Exemplo 6 (continuação)

c) A f.d.c. de X é $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$:

- se $x \leq 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$
- se $x > 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \frac{1}{5} e^{-t/5} dt = 0 + [-e^{-t/5}]_0^x$
 $= -e^{-x/5} - (-e^0)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/5}, & x > 0 \end{cases}$$



Exemplo 6 (continuação)

No caso de uma variável aleatória **contínua** a função distribuição cumulativa é uma **função contínua**, mas não necessariamente derivável $\forall x \in \mathbb{R}$.

(Recorde as propriedades do integral indefinido estudado em Análise Matemática.)

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad P[1 < X < 3] &= F(3) - F(1) = (1 - e^{-3/5}) - (1 - e^{-1/5}) \\ &= e^{-1/5} - e^{-3/5} \approx 0.2699. \end{aligned}$$

Propriedades da função distribuição cumulativa

As seguintes **propriedades da f.d.c.** foram ilustradas nos Exemplos 5 e 6:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$
3. F é uma função monótona não decrescente, i.e., dados dois números reais x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, tem-se $F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $F(x)$ é contínua à direita, i.e., $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0).$
5. $P(X = x_0) = F(x_0) - F(x_0^-)$ onde $F(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} F(x)$

Se X é uma v.a. contínua, então F é contínua (também à esquerda) e portanto $F(x_0^-) = F(x_0)$ e $P(X = x_0) = 0$, para todo o número real x_0 .

Variáveis aleatórias | valor médio

As variáveis aleatórias têm associados “indicadores” numéricos designados parâmetros.

Parâmetros de uma distribuição são números reais que caracterizam essa distribuição.

Definição | Valor Médio

O **valor médio**, **valor esperado** ou **esperança matemática** de uma variável aleatória X representa-se por $E[X]$, μ_X ou μ e define-se como:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad \text{se } X \text{ é v.a. discreta com distr. de prob. } (x_i, p_i)$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad \text{se } X \text{ é v.a. contínua com f. densidade } f(\cdot)$$

Se X for v.a. discreta com uma infinidade numerável de valores tem-se $E[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$. Neste caso só existe valor médio se a “soma infinita” de $|x_i| p_i$ existir.

Analogamente, no caso contínuo só existe valor médio, $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, se o integral impróprio $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx$ for convergente.

V.a. | valor médio de uma função de X

Se X é uma v.a. e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real de variável real, define-se **valor médio de $\varphi(X)$** como

$$E[\varphi(X)] = \sum_i \varphi(x_i) p_i \quad \text{se } X \text{ é v.a. discreta com dist. probab. } (x_i, p_i)$$

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x) dx \quad \text{se } X \text{ é v.a. contínua com f. densidade } f$$

Para que exista valor médio exige-se que exista a “soma infinita” de $|\varphi(x_i)| p_i$ (no caso de se tratar de uma v.a. discreta com uma infinidade de valores) ou que o integral de $|\varphi(x)| f(x)$ seja convergente.

Propriedades do Valor Médio de uma v.a.

1. Linearidade

- $E[a] = a.$
- $E[a + bX] = a + b E[X].$
- $E[\varphi(X) + \psi(X)] = E[\varphi(X)] + E[\psi(X)]$

2. Positividade

Se $X \geq 0$, i.e. a variável toma apenas valores ≥ 0 ,
tem-se $E[X] \geq 0$.

Definição

A **variância** de uma variável aleatória X representa-se por $Var[X]$, σ_X^2 ou apenas σ^2 e define-se como

$$\sigma_X^2 = E \left[(X - \mu)^2 \right]$$

$\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$ designa-se **desvio padrão** de X .

Nota:

$$Var[X] = E[X^2] - \mu^2$$

(Demonstrar como exercício.)

Propriedades

1. $\text{Var}[X] \geq 0$
2. $\text{Var}[a + b X] = b^2 \text{Var}[X]$.

Para o **desvio padrão** tem-se $\sigma_{(a+b X)} = |b| \sigma_X$

Exemplo 5 (continuação)

O número de aparelhos de micro-ondas vendidos diariamente num estabelecimento é uma variável aleatória X com a seguinte distribuição de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

- f) Qual o valor esperado do número de aparelhos de micro-ondas vendidos por dia?
- g) Se cada micro-ondas é vendido por 85 Euros, qual é a distribuição de probabilidade da receita bruta da venda de micro-ondas por dia?
- h) Calcule a receita bruta esperada da venda de micro-ondas por dia.

Exemplo 5 (continuação)

Resolução:

X é uma v.a. discreta que toma cinco valores.

$$\text{f) } E[X] = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 + 4 \times 0.1 = 1.4.$$

Em média são vendidos 1.4 aparelhos de micro-ondas por dia.

g) Sendo R a v.a. que caracteriza a receita bruta da venda por dia, $R = 85X$, logo

$$R = \begin{cases} 0 & 85 & 170 & 255 & 340 \\ 0.3 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 \end{cases}$$

h) $E[R] = E[85X] = 85E[X] = 119\text{€}$. A receita bruta é, em média, 119€ por dia.

Exemplo 6 (continuação)

O tempo de vida (em anos) de um dado equipamento pode ser modelado por uma variável aleatória X com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

- e) Qual é o tempo médio de vida deste equipamento?
- f) Qual é a variância do tempo de vida deste equipamento?
- g) Se o valor de retoma (V em €) do equipamento depender do seu tempo de vida através da expressão $V = 20 - 2X$, qual é o valor médio e a variância da retoma deste equipamento?

Exemplo 6 (continuação)

Resolução:

e) X é uma v.a. contínua.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot f(x) dx + \int_0^{+\infty} x \cdot f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \cdot \frac{1}{5} e^{-t/5} dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-t \cdot e^{-t/5} - 5 \cdot e^{-t/5} \right]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-x \cdot e^{-x/5}}_{\rightarrow 0} - 5 \cdot \underbrace{e^{-x/5}}_{\rightarrow 0} + 0 + 5 \cdot e^0 \right) = 5 \end{aligned}$$

(*) utilizou-se o método de primitivação por partes, $P(fg) = Fg - P(Fg')$ com $f = \frac{1}{5} e^{-t/5}$ e $g = t$ e portanto $F = Pf = -e^{-t/5}$ e $g' = 1$.

Em média, este equipamento dura 5 anos.

Exemplo 6 (continuação)

f) $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2$ em que

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot f(x) dx + \int_0^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 dx + \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = 0 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t^2 \cdot \frac{1}{5} e^{-t/5} dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-t^2 \cdot e^{-t/5} - 6t \cdot e^{-t/5} - 30 \cdot e^{-t/5} \right]_0^x \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-x^2 \cdot e^{-x/5}}_{\rightarrow 0} \underbrace{-6x \cdot e^{-x/5}}_{\rightarrow 0} - 30 \cdot \underbrace{e^{-x/5}}_{\rightarrow 0} + 0 + 30 \cdot e^0 \right) = 30 \end{aligned}$$

(*) utilizou-se o método de primitivação por partes, $P(fg) = Fg - P(Fg')$ com $f = t \cdot \frac{1}{5} e^{-t/5}$ e $g = t$ e portanto $F = Pf = -te^{-t/5} - 5e^{-t/5}$ e $g' = 1$.

Logo, $\text{Var}[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 30 - 5^2 = 5(\text{ano})^2$.

g) $E[V] = E[20 - 2X] = 20 - 2E[X] = 10\text{€}$ e
 $\text{Var}[V] = \text{Var}[20 - 2X] = \text{Var}[-2X] = (-2)^2 \text{Var}[X] = 4 \times 5 = 20\text{€}^2$.

Definição

O **quantil de probabilidade p** ($0 < p < 1$) de uma v.a. X representa-se por χ_p e define-se como o menor valor da variável aleatória X tal que $F_X(\chi_p) \geq p$.

Se $p = 0.5$, $\chi_{0.5}$ designa-se **mediana de X** e é o menor valor da variável tal que $F_X(\chi_{0.5}) \geq 0.5$.

Nota: Se X é uma v.a. contínua em que F_X não tem patamares (usual),

- o quantil de probabilidade p é o valor χ_p tal que $F_X(\chi_p) = p$, ou seja é a solução da equação $F_X(x) = p$.
- a mediana $\chi_{0.5}$, é a solução de $F_X(x) = 0.5 \iff \int_{-\infty}^x f(t)dt = 0.5$.

Vetores aleatórios

Quando ao resultado de uma experiência aleatória se associam 2 ou mais atributos numéricos, obtêm-se um **vetor aleatório**.

No caso de serem 2 atributos obtém-se um **par aleatório** representado frequentemente por (X_1, X_2) ou (X, Y) .

Exemplos:

- quantidade de precipitado P e volume V de gás numa reação química, (P, V) ;
- altura A e diâmetro à altura do peito D do tronco de uma árvore seleccionada ao acaso, (A, D) .

Definição

Um **par aleatório** (X, Y) é uma aplicação

$$\begin{aligned}(X, Y) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega &\rightarrow (x, y)\end{aligned}$$

Vão considerar-se os **tipos de pares aleatórios**:

- par aleatório **discreto** $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias discretas;
- par aleatório **contínuo** $\Rightarrow$ componentes são ambas variáveis aleatórias contínuas.

Pares aleatórios discretos

(X, Y) é um par aleatório **discreto** se toma os valores (x_i, y_j) com probabilidades $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$.

Definição | massa de probabilidade conjunta

Designa-se **distribuição de probabilidades conjunta** do par (X, Y) aos valores (x_i, y_j) e respectivas probabilidades p_{ij}

p_{ij} é designada **função massa de probabilidade conjunta** e deve verificar as seguintes condições:

$$p_{ij} \geq 0 \quad \forall (i, j) \quad \text{e} \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1.$$

Pares aleatórios discretos

Um modo de representar a **distribuição de probabilidades conjuntas** de um par aleatório discreto (X, Y) é na forma de um quadro

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	$p_{2\cdot}$
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
.	.	.	...	.	.
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	$p_{m\cdot}$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot n}$	1

$$p_{i\cdot} = P[X = x_i] = \sum_{j=1}^n p_{ij} \quad \text{e} \quad p_{\cdot j} = P[Y = y_j] = \sum_{i=1}^m p_{ij}$$

são as **probabilidades marginais** de X e Y respetivamente.

Pares aleatórios discretos | Exemplo 7

(Adaptado do 1º Teste 2021/22)

4. Um estudante está a estudar intensamente para os seus exames. Para descontrair nos intervalos da sua preparação costuma realizar o seguinte jogo: faz séries de 2, 3 ou 4 lançamentos a um cesto de basquetebol. Seja (X, Y) o par aleatório discreto em que: X é o número de lançamentos realizados numa série e Y é o número de lançamentos acertados numa série. A função massa probabilidade conjunta de (X, Y) é dada por:

X	Y	0	1	2	3	4	$p_{j\cdot}$
2		0.01	0.02	0.04	0	0	0.07
3		0.02	0.03	0.04	0.04	0	0.13
4		0	0.1	0.2	0.2	0.3	0.8
	$p_{\cdot j}$	0.03	0.15	0.28	0.24	0.3	1

- o estudante faz 3 lançamentos e acerta todos em 4% das séries;
- o estudante faz 2 lançamentos em 7% das séries;
- o estudante acerta 4 lançamentos em 30% das séries;
- o estudante acerta todos os lançamentos em 38% das séries.

Pares aleatórios discretos

Definição | probabilidade condicional de X dado Y

A **probabilidade condicional** de X dado $Y = y_j$ (fixo) com $P[Y = y_j] > 0$ é definida como

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[Y = y_j]} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

Definição | probabilidade condicional de Y dado X

Do mesmo modo a **probabilidade condicional** de Y dado $X = x_i$ (fixo) com $P[X = x_i] > 0$ é definida como

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{P[X = x_i, Y = y_j]}{P[X = x_i]} = \frac{p_{ij}}{p_{i \cdot}}$$

Pares aleatórios discretos | Exemplo 7 (cont.)

- nas séries de 2 lançamentos, o estudante acerta os 2 lançamentos em $\frac{4}{7}$ das vezes, acerta 1 lançamento em $\frac{2}{7}$ das vezes e falha os 2 lançamentos em $\frac{1}{7}$ das vezes;
- nas séries em que falha todos os lançamentos, o estudante faz 2 lançamentos em $\frac{1}{3}$ das séries e 3 lançamentos em $\frac{2}{3}$ das vezes;
- o estudante acerta 2 lançamentos em $\frac{4}{7}$ das vezes em que faz 2 lançamentos; em $\frac{4}{13}$ das vezes em que faz 3 lançamentos e em $\frac{1}{4}$ das vezes em que faz 4 lançamentos.

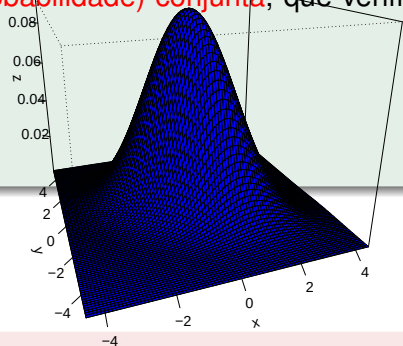
(Verificar os valores a azul como exercício)

Pares aleatórios contínuos

Definição | função densidade conjunta

Um par aleatório (X, Y) diz-se **contínuo** se existir uma função $f(x, y)$, designada **função densidade (de probabilidade) conjunta**, que verifica as seguintes condições:

- $f(x, y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1.$



Os conceitos e propriedades que se seguem, serão apenas apresentados para pares aleatórios discretos. No entanto os conceitos têm correspondência para v.a. contínuas.

Independência de variáveis aleatórias

Definição

Dado o par aleatório discreto (X, Y) diz-se que as variáveis X e Y são **independentes** se e só se

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \quad \forall i, j$$

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório discreto (X, Y) , e uma função $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, define-se valor esperado de $g(X, Y)$ como

$$E[g(X, Y)] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) p_{ij}$$

Por exemplo,

- $E[X] = \sum_i \sum_j x_i p_{ij} = \sum_i x_i \sum_j p_{ij} = \sum_i x_i p_i.$
- $E[XY] = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$
- $E[X + Y] = \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{ij}$

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Propriedades do Valor Médio:

1. **Aditividade** $E[X \pm Y] = E[X] \pm E[Y]$

2. Se X e Y variáveis aleatórias **independentes**



$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Valor Médio de uma função de um par aleatório

Nota:

O recíproco da Propriedade 2 não é verdadeiro.

Se X e Y são v. a.'s com a seguinte distribuição de probabilidades

X	Y	-1	0	1
0		0	1/2	0
1		1/4	0	1/4

tem-se $E[XY] = E[X] \times E[Y]$ e no entanto X e Y não são independentes.

(Verificar como exercício.)

Covariância de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) define-se **covariância de X e Y** como

$$\text{Cov}[X, Y] \equiv \sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

Nota: $\text{Cov}[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$ (Demonstrar como exercício.)

Propriedades

1. $\text{Var}[X \pm Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] \pm 2\text{Cov}[X, Y]$
2. Se X e Y são v.a.'s independentes $\implies \text{Cov}[X, Y] = 0$.
Nota: O recíproco não é verdadeiro.
3. $\text{Cov}[a + bX, c + dY] = bd \text{Cov}[X, Y]$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
4. $|\text{Cov}[X, Y]| \leq \sigma_X \sigma_Y$, onde σ_X designa o desvio padrão da v.a. X .

Coeficiente de correlação de um par aleatório

Definição

Dado o par aleatório (X, Y) define-se **coeficiente de correlação** de X e Y como

$$\rho \equiv \rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$(\sigma_X > 0 \text{ e } \sigma_Y > 0)$.

Propriedades

1. $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$
2. Se X e Y são v. a. independentes $\implies \rho_{X,Y} = 0$.
3. $\rho_{a+bX, c+dY} = \begin{cases} \rho_{X,Y} & \text{se } bd > 0 \\ -\rho_{X,Y} & \text{se } bd < 0 \end{cases}$

Modelos (Distribuições) Discretos

Há fenómenos que podem ser modelados por distribuições conhecidas. Algumas das mais importantes distribuições discretas são:

- Distribuição uniforme discreta
- Distribuição de Bernoulli e binomial
- Distribuição de Poisson

Distribuição uniforme discreta

Definição

Seja X uma v.a. que toma os valores $x_1, x_2, \dots, x_k$ com igual probabilidade, isto é

$$X = \begin{cases} x_1 & x_2 & \dots & x_k \\ 1/k & 1/k & \dots & 1/k \end{cases}$$

então diz-se que X tem distribuição **uniforme discreta**,
 $X \sim UD(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Caso particular

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \dots & n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{cases}$$

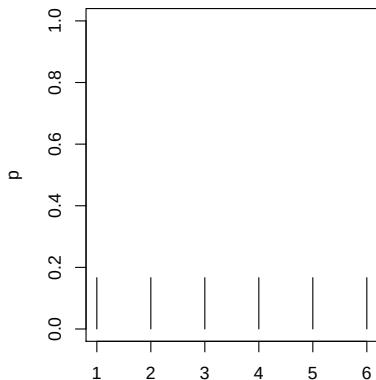
$X \sim UD(1, 2, \dots, n)$.

Distribuição uniforme discreta | Exemplo 8

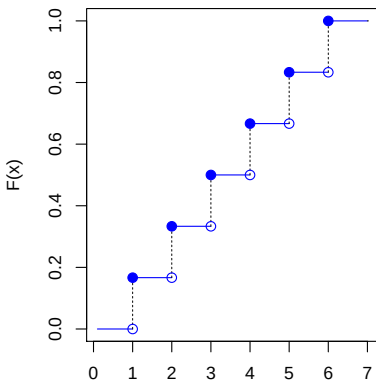
Lançamento de um dado equilibrado e observação do número resultante:

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \dots & 6 \\ 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6 \end{cases}$$

Massa de Probabilidade



Função distribuição cumulativa



Distribuição uniforme discreta

Valor médio e variância

$$X = \begin{cases} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{n+1}{2} \quad \text{Var}[X] = \frac{n^2-1}{12}$$

Demonstrar estes resultados como exercício, sabendo que a soma dos n primeiros números naturais é $\frac{n(n+1)}{2}$ e que a soma dos seus quadrados é $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Para o Exemplo 8, $E[X] = 3.5$ e $\text{Var}[X] = 2.9167$.

Distribuição de Bernoulli

Experiência (ou prova) de Bernoulli

Experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis, $\Omega = \{\text{"sucesso"}, \text{"insucesso"}\}$, em que a probabilidade de sucesso é p e portanto a probabilidade de insucesso é $1 - p$.

Distribuição de Bernoulli com parâmetro p

A variável aleatória X que descreve o resultado de uma **única** experiência de Bernoulli, associando o valor **1** a **sucesso** e o valor **zero** a **insucesso**, tem massa de probabilidade

$$X = \begin{cases} 0 & 1 \\ 1 - p & p \end{cases}$$

X tem **distribuição de Bernoulli com parâmetro p** , $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Distribuição de Bernoulli

Exemplos:

- presença ou ausência de infeção numa planta
- artigo defeituoso ou não defeituoso numa linha de produção
- dia com chuva ou sem chuva
- animal vacinado ou não vacinado

Valor esperado e variância:

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$E[X] = p \quad \text{Var}[X] = pq, \quad q = 1 - p$$

Distribuição Binomial

Provas de Bernoulli são **independentes** quando o resultado de uma prova não interfere no resultado de outra.

Definição

A v.a. X que conta o número de sucessos em n provas de Bernoulli independentes, todas com a mesma probabilidade de sucesso p , tem distribuição binomial com parâmetros n e p , $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Note-se que $X \sim \mathcal{B}(1, p) \Leftrightarrow X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

Distribuição Binomial

Exemplo 9.

De uma embalagem de bolbos de tília, onde se indica que a taxa de germinação é 40%, colocaram-se 5 bolbos a germinar. A germinação ou não germinação de um bolbo é o resultado de uma experiência de Bernoulli com probabilidade de sucesso (*sucesso = germinação*) $p = 0.4$. O número de bolbos que germinam, em 5, pode ser considerado o número de sucessos em $n = 5$ provas de Bernoulli independentes com probabilidade de sucesso $p = 0.4$, $X \sim \mathcal{B}(5, 0.4)$.

- a probabilidade de germinarem todos os bolbos é $P[X = 5] = 0.4^5$
- a probabilidade de não germinar qualquer bolbo é $P[X = 0] = 0.6^5$
- a probabilidade de germinarem 3 bolbos é

$$P[X = 3] = \binom{5}{3} (0.4)^3 (0.6)^2$$

Note que a variável aleatória X apenas pode tomar os valores 0, 1, ..., 5.

Exercício: Calcular as probabilidades de X tomar cada um dos valores possíveis e confirmar que somam 1.

Distribuição Binomial

Caracterização da v.a. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$:

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

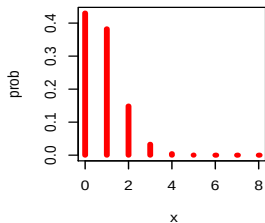
→ n^{o} de “sucessos” nas n provas

$$P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

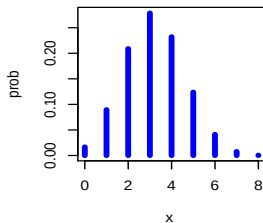
→ probabilidade de ocorrerem
 x “sucessos”

Para $n = 8$ e $p = 0.1, 0.4, 0.7$, a função massa de probabilidade é:

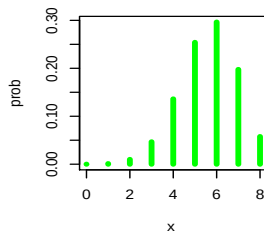
$x \sim \mathcal{B}(8, 0.1)$



$x \sim \mathcal{B}(8, 0.4)$



$x \sim \mathcal{B}(8, 0.7)$



Distribuições em Python, módulo `scipy.stats`

Em Python o *package* SciPy, em particular o módulo `stats` disponibiliza muitas distribuições estatísticas. Para consultar o manual do módulo `scipy.stats` pode aceder a <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/stats.html#module-scipy.stats>

A forma mais simples de aceder a uma distribuição utiliza a instrução

```
from scipy.stats import <distribuicao>
```

Métodos

`<distribuicao>.pmf(k, ...)`=probability mass function at k
devolve a massa de probabilidade, $P(X = k)$, se X é v.a. discreta

`<distribuicao>.pdf(x, ...)`=probability density function at x
devolve a função densidade $f(x)$ para uma v.a. contínua

`<distribuicao>.cdf(x, ...)`=cumulative distribution function
devolve $F(x) = P(X \leq x)$

`<distribuicao>.ppf(pr, ...)`=percent point function (inverse of cdf) at pr devolve o quantil de probabilidade pr

Distribuição Binomial

Exemplo de utilização da distribuição binomial

```
from scipy.stats import binom
```

$X \sim \mathcal{B}(3, 0.2)$

```
>>> print(binom.pmf(range(0,4), 3, 0.2)) #P(X = x), x=0,1,2,3
[0.512 0.384 0.096 0.008]
>>> print(binom.cdf(range(0,4), 3, 0.2)) #F(x), x=0,1,2,3
[0.512 0.896 0.992 1.    ]
>>> print(binom.ppf([0.5, 0.75, 0.9], 3, 0.2)) # Quantil de
>>>                                     # probabilidade pr, pr=0.5, 0.75, 0.9
[0.  1.  2.]
```

No Exemplo 9, $X \sim \mathcal{B}(5, 0.4)$, $P[X = 3]$ obtém-se com a instrução

```
>>> print(binom.pmf(3, 5, 0.4))
0.23039999999999994
# que e' igual a
>>> print(binom.cdf(3, 5, 0.4)-binom.cdf(2, 5, 0.4))
0.230400000000000016
```

Distribuição Binomial

Tabelas da binomial, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

A tabela contém, para cada n e p , os valores da **função distribuição cumulativa** $F(x)$, para $x = 0, 1, \dots, n$.

Para obter $P[X = a]$ será necessário utilizar
 $P[X = a] = F(a) - F(a^-) = F(a) - F(a - 1)$.

Distribuição Binomial

No Exemplo 9, $X \sim \mathcal{B}(5, 0.4)$,

$$P[X = 3] = F(3) - F(2) = 0.9130 - 0.6826 = 0.2304.$$

Função Distribuição Cumulativa da Binomial

Esta tabela foi criada com base no comando `pbinom` do *software R*, indicando os valores da Função Distribuição Cumulativa duma variável aleatória com distribuição Binomial, $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, para valores dos parâmetros n indicados na primeira coluna, valores do parâmetro p indicados no topo de cada coluna, e valores da variável x indicados na segunda coluna. No corpo da tabela estão as probabilidades $P[X \leq x]$.

n	x	p									
		0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0312
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688

Distribuição Binomial

Valor médio e variância

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$E[X] = np \quad \text{Var}[X] = npq, \quad q = 1 - p$$

Relação entre as distribuições do número de sucessos e do número de insucessos

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \Rightarrow (n - X) \sim \mathcal{B}(n, 1 - p).$$

Distribuição Binomial

Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_1, \dots, X_k$ são independentes e $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, então

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$$

com $n = \sum_{i=1}^k n_i$.

Aqui <https://www.statology.org/binomial-distribution-real-life-examples/>

encontra exemplos da vida real em que se utiliza a distribuição binomial.

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson permite modelar o número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região do espaço.

Processo de Poisson refere-se ao número de ocorrências num intervalo de tempo ou numa região espacial que verifica as propriedades:

- os números de ocorrências em intervalos de tempo (regiões) disjuntos são independentes;
- a probabilidade de ocorrência num intervalo (região) muito pequeno é proporcional à amplitude (tamanho) do intervalo (região);
- a probabilidade de o número de ocorrências ser superior a um é nula em intervalos (regiões) muito pequenos.

Distribuição de Poisson

O modelo de Poisson é então adequado quando queremos modelar o número de ocorrências num processo cujo comportamento médio é “estável”²: número de abelhas que regressam à colmeia durante períodos de 5 minutos, número de glóbulos vermelhos em cada cela de um hemacímetro, número de camarões que se recolhe num camaroeiro de determinado tamanho num tanque de um viveiro, número de ninhos de determinada espécie que existe em determinada área. É a tradução simples da nossa fé na regularidade, e consequente predictibilidade, dos fenómenos. Se pegarmos em punhados de arroz e os “semearmos” enquanto percorremos uma sala, a configuração que esperamos que resulte tem um padrão de aleatoriedade que corresponde a contagens de Poisson. O modelo de Poisson é também uma bitola no que respeita a dispersão, porque $\frac{\text{var}(X)}{\mathbb{E}(X)} = 1$: Se

em: https://www.instituto-camoes.pt/images/stories/tecnicas_comunicacao_em_portugues/Matematica/Matematica-ModelosdeContagememPadroesdeAleatoriedade.pdf

Distribuição de Poisson

Seja $\lambda > 0$ o número médio de ocorrências num dado intervalo de tempo (ou numa região do espaço) num processo de Poisson. Então a v.a. que representa o número de ocorrências nesse intervalo de tempo (ou região), tem **distribuição de Poisson com parâmetro λ , $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$** .

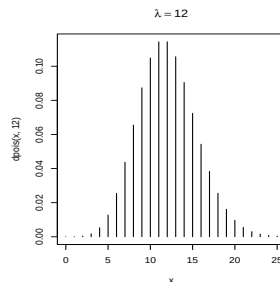
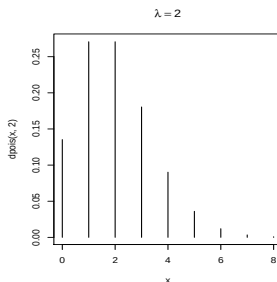
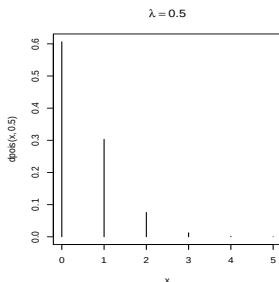
Função massa de probabilidade

$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 0$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Distribuição de Poisson

Para $\lambda = 0.5, 2, 12$, a função massa de probabilidade é:



Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson em Python. Exemplos

- $X \sim \mathcal{P}(3)$

```
>>> from scipy.stats import poisson
>>> print(poisson.pmf(range(0,6), 3)) # P(X=x), x=0,1,...5
[0.04978707 0.14936121 0.22404181 0.22404181 0.16803136 0.10081881]
>>> print(poisson.cdf(range(0,6), 3)) # P(X<=x), x=0,1,...5
[0.04978707 0.19914827 0.42319008 0.64723189 0.81526324 0.91608206]
>>> print(poisson.ppf([0.4,0.5,0.7,0.9], 3))
# Quantil de prob. 0.4,0.5,0.7 e 0.9
[2. 3. 4. 5.]
```

- $X \sim \mathcal{P}(0.7)$, $P[X = 2]$ obtém-se com uma das instruções:

```
>>> print(poisson.pmf(2, 0.7))
0.12166339942889529
# Ou
>>> print(poisson.cdf(2, 0.7)-poisson.cdf(1, 0.7))
0.12166339942889537
```

Tabelas da Poisson, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

A tabela contém, para cada λ , os valores da **função distribuição cumulativa** $F(x)$, para $x = 0, 1, \dots$.

Para obter $P[X = a]$ será necessário utilizar
 $P[X = a] = F(a) - F(a^-) = F(a) - F(a - 1)$.

Distribuição de Poisson

Se $X \sim \mathcal{P}(0.7)$, $P[X = 2] = F(2) - F(1) = 0.966 - 0.844 = 0.122$.

Função Distribuição Cumulativa da Poisson

Esta tabela foi criada com base no comando `ppois` do *software R*, indicando os valores da Função Distribuição Cumulativa duma variável aleatória com distribuição Poisson, $X \sim P(\lambda)$, para valores do parâmetro λ indicados no topo de cada coluna, e valores da variável x indicados no início de cada linha. No corpo da tabela estão as probabilidades $P[X \leq x]$.

	$\lambda = E[X]$									
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

	$\lambda = E[X]$									
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677

Distribuição de Poisson

Valor médio e variância

$$E[X] = \lambda \quad \text{Var}[X] = \lambda.$$

Teorema da estabilidade da soma

Se as v.a. $X_1, \dots, X_k$ são independentes e $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, então

$$\sum_{i=1}^k X_i \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\right).$$

Aproximação Binomial $\rightarrow$ Poisson

Se $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ com $n \geq 20$ e $p \leq 0.05$ então $X \approx \mathcal{P}(\lambda)$, com $\lambda = np$.

Distribuição de Poisson

Exemplo 10 (1º Teste de 2021/22)

Um sismo com magnitude superior a cinco é considerado um “grande sismo”. Admita que o número de “grandes sismos” que ocorrem anualmente em Portugal Continental segue uma distribuição de Poisson. De acordo com o Catálogo Sísmico de Portugal Continental, o número médio anual desses “grandes sismos” é 0.7. Calcule a probabilidade de:

- a) ocorrerem dois ou mais “grandes sismos” num ano;
- b) o número total de “grandes sismos” em 8 anos ser inferior a seis;
- c) em 20 anos, existirem 10 anos sem “grandes sismos”.

Resolução:

- a) Seja X a v.a. que representa o número de “grandes sismos” que ocorrem em Portugal num ano, $X \sim \mathcal{P}(0.7)$.

$$P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - F_X(1) \underbrace{=}_{\text{tabela}} 1 - 0.844 = 0.156;$$

Distribuição de Poisson

Exemplo 10 (continuação da resolução):

- b) seja X_i a v.a. que representa o número de “grandes sismos” que ocorrem em Portugal no ano i , $i = 1, \dots, 8$, $X_i \sim \mathcal{P}(0.7)$. Admitindo que o número de “grandes sismos” é independente de ano para ano,

$$Y = \sum_{i=1}^8 X_i \sim \mathcal{P}(8 \times 0.7). \quad P[Y < 6] = F_Y(5) = 0.512 \text{ (tabela da Poisson com } \lambda = 5.6);$$

- c) seja W a v.a. que apresenta o número de anos, em 20, em que não ocorrem “grandes sismos”; esta v.a. conta sucessos em $n = 20$ provas de Bernoulli independentes (admitindo que a ocorrência de “grandes sismos” é independente de ano para ano) em que a probabilidade de sucesso em cada prova é a probabilidade de não ocorrer um “grande sismo”, $p = P[X = 0] = \frac{e^{-0.7} 0.7^0}{0!} = 0.497$. Assim, $W \sim \mathcal{B}(20, 0.497)$.
Pede-se $P[W = 10] = F_W(10) - F_W(9) \approx 0.5881 - 0.4119 = 0.1762$ (os valores de F_W foram lidos na tabela da binomial com $n = 20$ e $p = 0.5$).

Distribuição de Poisson

Exemplo 10 (resolução com Python):

a) $X \sim \mathcal{P}(0.7)$, $P[X \geq 2] = 0.15580498355460382$

```
from scipy.stats import poisson
print(1-poisson.cdf(1, 0.7))
```

b) $Y \sim \mathcal{P}(5.6)$, $P[Y < 6] = 0.5118609383755033$

```
print(poisson.cdf(5, 5.6))
```

c) $W \sim \mathcal{B}(20, P(X=0))$, $P[W = 10] = 0.1761148898842109$

```
P0=poisson.pmf(0, 0.7) #P(X=0)
from scipy.stats import binom
print(binom.pmf(10,20,P0))
```

Modelos (Distribuições) Contínuos

As principais distribuições contínuas incluem:

- Distribuição uniforme contínua
- Distribuição normal

Distribuição uniforme contínua

Definição

Uma v.a. contínua diz-se ter **distribuição uniforme** ou **rectangular** no intervalo (a, b) e representa-se por $X \sim \mathcal{U}(a, b)$ se a função densidade de probabilidade (f.d.p.) é da forma:

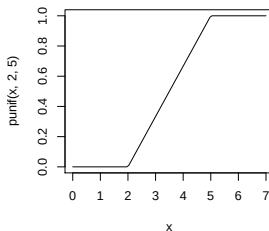
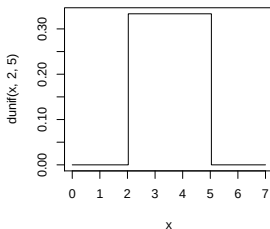
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x \leq a \text{ ou } x \geq b. \end{cases}$$

A função distribuição cumulativa correspondente é (verificar como exercício):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b. \end{cases}$$

Distribuição uniforme contínua

Gráficos da função densidade e da função distribuição cumulativa de uma v.a. $X \sim \mathcal{U}(2, 5)$:



Valor médio e variância

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$

$$E[X] = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Var}[X] = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Distribuição normal ou de Gauss

É a distribuição contínua mais importante:

- é um modelo adequado para representar muitos fenómenos da vida real, nomeadamente características biométricas, erros de medição, etc;
- surge como a distribuição limite da soma (e da média) de muitas v.a. em certas condições (Teorema Limite Central, mais à frente);
- algumas distribuições (como a binomial e a Poisson) podem ser bem aproximadas pela normal.

Poderá ter interesse em ver este vídeo

https://www.probabilitycourse.com/videos/chapter4/video4_9.php

Distribuição normal ou de Gauss

Função densidade

A v.a. contínua X tem **distribuição normal** ou **de Gauss** com parâmetros μ e σ , $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ se a sua f.d.p. é da forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

Os **parâmetros da distribuição normal** são:

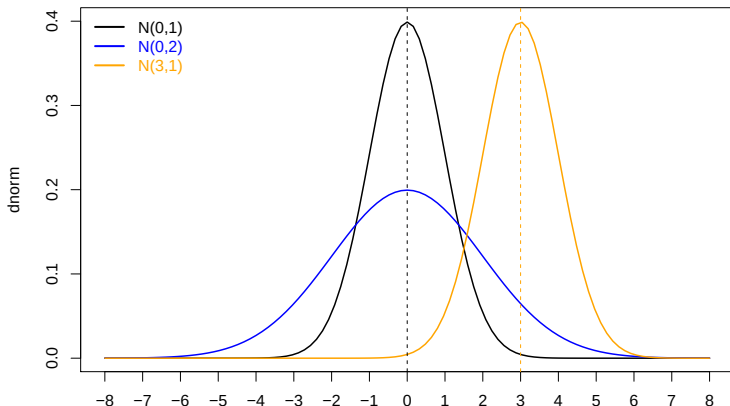
- $\mu \in \mathbb{R}$, o valor médio ou valor esperado de X
- $\sigma > 0$, o desvio padrão de X .

Portanto $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Rightarrow E[X] = \mu; \quad Var[X] = \sigma^2$.

Distribuição normal ou de Gauss

A função densidade

- tem a forma de sino com máximo em $x = \mu$;
- é simétrica em relação à reta vertical $x = \mu$: $f(\mu - x) = f(\mu + x)$;
- tem pontos de inflexão em $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.



Distribuição normal ou de Gauss

Normal reduzida

O caso particular $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ corresponde à distribuição **normal reduzida**, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, com f.d.p.

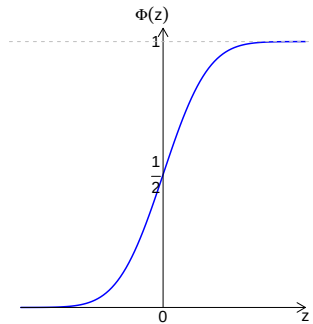
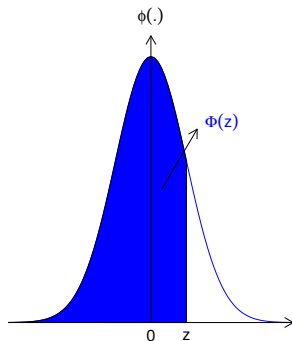
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

A função distribuição cumulativa é

$$\Phi(z) = P[Z \leq z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

$\Phi(z)$ é uma função não elementar; para o cálculo de probabilidades de uma v.a. normal é necessário recorrer a *software* ou tabelas.

Distribuição normal reduzida



Propriedades:

- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Distribuição normal ou de Gauss

Teorema

Seja $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ e $Y = a + bX$ então $Y \sim \mathcal{N}(a + b\mu, |b|\sigma)$.

O seguinte resultado permite usar as tabelas da distribuição $\mathcal{N}(0, 1)$ para calcular probabilidades de uma $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

Corolário

Seja $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, então a v.a. $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ tem distribuição normal reduzida, i.e., $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Distribuição normal ou de Gauss

Teorema da estabilidade da soma de normais

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a. normais independentes, tais que

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1), \quad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2), \quad \dots, \quad X_n \sim \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n).$$

A v.a. $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ tem distribuição normal de parâmetros (μ, σ)

$$\text{com } \mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}$$

Corolário

Sejam $X_1, \dots, X_n$ v.a. normais independentes e semelhantes, i.e., tendo todas o mesmo valor médio μ e a mesma variância σ^2 .

As variáveis aleatórias **soma** e **média**, definidas respetivamente como $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, têm distribuição normal assim definida

$$S_n \sim \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n}) \quad \text{e} \quad \bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

Exemplo 11

Uma vacaria tem uma produção diária de leite que se admite seguir uma lei normal com $\mu = 950$ litro e $\sigma = 50$ litro.

- a) Qual a probabilidade de se ter uma produção inferior a 1000 litros?
- b) Qual a percentagem de dias em que a produção ultrapassa a produção média em mais de 100 litros?
- c) Se na região existe outra vacaria, com uma produção diária que se admite normal com $\mu = 900$ l e $\sigma = 40$ l, funcionando independentemente da primeira, qual a probabilidade de num dado dia a produção total das duas vacarias ser superior a 1800 litros?

Exemplo 11 (resolução)

X : v.a. que representa a produção (litro) diária de leite,

$X \sim \mathcal{N}(950, 50)$

$$\text{a) } P[X < 1000] = \Phi\left(\frac{1000 - 950}{50}\right) = \Phi(1) = 0.84134 \text{ (Tabela)}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } P[X > 950 + 100] &= P\left[\frac{X - 950}{50} > \frac{100}{50}\right] = 1 - \Phi\left(\frac{100}{50}\right) = \\ &= 1 - \Phi(2) \underbrace{=}_{\text{Tabela}} 1 - 0.97725 = 0.02275 \end{aligned}$$

$$\text{c) } Y \sim \mathcal{N}(900, 40)$$

X, Y independentes $\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(950 + 900, \sqrt{50^2 + 40^2})$

$$\begin{aligned} P[X + Y > 1800] &= 1 - \Phi\left(\frac{1800 - 1850}{\sqrt{50^2 + 40^2}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.78) = \\ &= \Phi(0.78) = 0.7823 \text{ (Tabela)} \end{aligned}$$

Exemplo 11 (Tabela da normal reduzida)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169

Exemplo 11 (resolução com Python)

a) $X \sim \mathcal{N}(950, 50)$, $P[X < 1000] = 0.8413447460685429$

```
from scipy.stats import norm
print(norm.cdf(1000,950,50))
# Ou
print(norm.cdf(1,0,1))
```

b) $X \sim \mathcal{N}(950, 50)$, $P[X > 1050] = 0.02275013194817921$

```
from scipy.stats import norm
print(1-norm.cdf(1050,950,50))
# Ou
print(1-norm.cdf(2,0,1))
```

c) $X + Y \sim \mathcal{N}(950 + 900, \sqrt{50^2 + 40^2})$,
 $P[X + Y > 1800] = 0.7825601707521084$

```
print(1-norm.cdf(1800,1850,(50**2+40**2)**0.5))
# Ou
print(1-norm.cdf((1800-1850)/((50**2+40**2)**0.5), 0, 1))
```

Teorema Limite Central

O TLC estabelece que a **soma** e a **média** de um *elevado* número de v.a. independentes e identicamente distribuídas (com qualquer distribuição, *inclusive* discreta), têm distribuição **aproximadamente normal**:

Teorema Limite Central

Sejam $X_1, \dots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância σ^2 (finita).

Quando n é “grande”, a soma $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ e a média $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ verificam:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad \text{e} \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

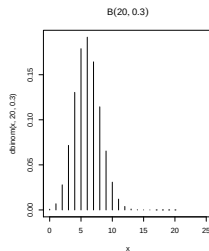
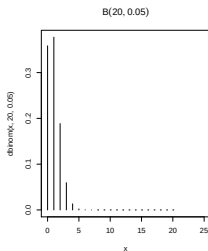
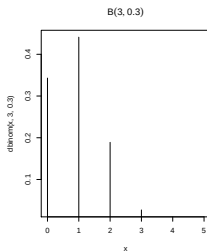
Aplicações do TLC à aproximação de distribuições

(não avaliado)

Teorema de De Moivre (*Binomial* $\rightarrow$ *Normal*)

Seja X uma v.a. com **distribuição $B(n, p)$** com valor médio $\mu = np$ e variância $\sigma^2 = npq$. Então quando n é elevado e p afastado de 0 e de 1, em concreto $np > 5$ e $nq > 5$,

$$\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$



Aplicações do TLC à aproximação de distribuições

(não avaliado)

Teorema: aproximação *Poisson* $\rightarrow$ *Normal*

Seja $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Quando $\lambda \rightarrow \infty$ então $\frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Regra prática:

A aproximação é considerada boa para $\lambda \geq 12$.

