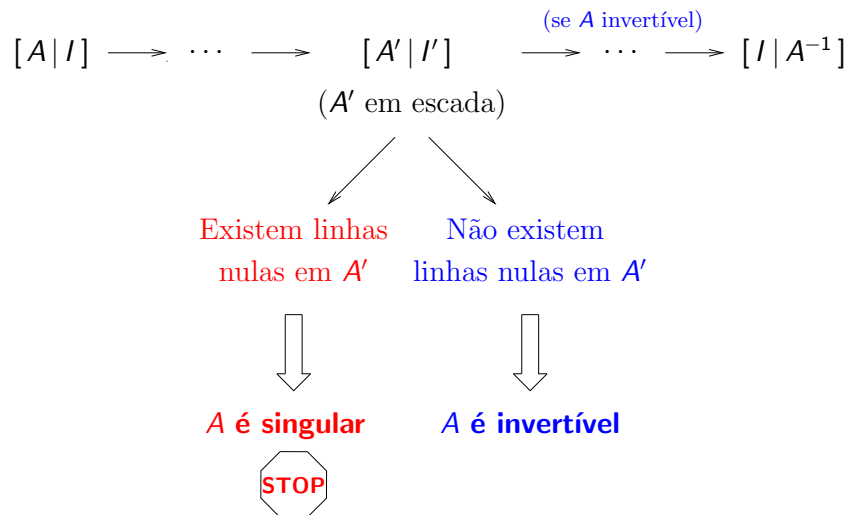


Algoritmo da inversa

Das considerações do slide anterior deduz-se o seguinte algoritmo.

- **Input:** Matriz quadrada A
- **Objectivo:** Decidir sobre a invertibilidade de A e calcular A^{-1}



Algoritmo da inversa - exercício

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Qual é a solução do sistema linear $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão:** ver o slide 62.)

Resolução do exercício aplicando o algoritmo da inversa

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A' | I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e não tem linhas nulas. Logo A é invertível. Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss vem,

$$[A' | I'] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}].$$

Podemos confirmar que A^{-1} está bem calculada verificando a relação $AA^{-1} = I$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad \checkmark$$

Note que vetor $(1, 0, 0)$ é a 1ª coluna da matriz identidade, que denotamos por e_1 , e portanto pelos considerações do slide 62 a solução de $Ax = e_1$ é a primeira coluna da matriz A^{-1} , isto é, o vetor $(-1, 0, -1)$.

Exercício - 2

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A | I]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 + L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [A' | I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e possui uma linha nula. Logo A é não invertível, isto é, é singular.