

Característica de uma matriz

- ▶ A **característica** de uma matriz A , denotada $\text{car}(A)$, é o **número de pivots** de qualquer matriz em escada A' obtida a partir de A , por aplicação de operações elementares do método de Gauss⁶.
- ▶ Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m \times n}$ **não pode ser superior ao número de linhas m nem ao número de colunas n de A** , isto é,

$$\text{car}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

- ▶ Pode-se provar ainda a relação,

$$\text{car}(A^T) = \text{car}(A).$$

⁶Veremos no capítulo dos espaços vetoriais que a característica de uma matriz pode ser equivalentemente definida usando o conceito de dimensão. . .

Exemplo

Se, por exemplo,

$$A_{4 \times 5} \xrightarrow{\text{oper. elementares} \dots} A' = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{4 \times 5},$$

obtém-se

$$\text{car}(A) = \text{n}^{\circ} \text{ de pivots de } A' = 3 \leq \min\{4, 5\},$$

e ainda,

$$\text{car}(A^T) = \text{car}(A) = 3.$$

Invertibilidade e característica

Do algoritmo da inversa deduz-se imediatamente o seguinte critério para decidir se uma matriz é invertível (justifique!).

Critério de invertibilidade

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Exercício

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Resolução: Aplicando a fase descendente do método de Gauss tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 2\alpha & 6 + \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo pelo critério de invertibilidade, a matriz $A_{3 \times 3}$ é invertível se e só se $\text{car}(A) = 3$ se e só se o nº de pivots de A' é 3 se e só se $\alpha \neq 0, 2$.

Propriedades da inversa

Proposição

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. A^{-1} é invertível e tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA é invertível para todo o $\lambda \neq 0$ e tem-se $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa⁽⁷⁾.
4. A^k é invertível para todo o $k \in \mathbb{N}$ e tem-se $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(A demonstração das propriedades será feita nas aulas práticas.)

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz invertível, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

⁷Mais geralmente, se $A_1, A_2, \dots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1 A_2 \cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- ▶ A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, admite a solução única $x = \frac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$.
- ▶ A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Proposição

Se A é uma matriz invertível de ordem n então o sistema linear $Ax = b$ é PD com solução única $x = A^{-1}b$ qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^n$.

Dem: se A é invertível, existe A^{-1} e podemos escrever, multiplicando à esquerda ambos os membros da equação matricial $Ax = b$ por A^{-1} ,

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow I_n x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ do slide 65.

Como A é invertível, conclui-se da proposição do slide anterior que o sistema linear $Ax = b$ é PD para todo o $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, tendo como única solução,

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 + 2b_3 \\ \frac{1}{2}b_2 \\ -b_1 + b_3 \end{bmatrix},$$

onde usámos o cálculo da matriz A^{-1} efetuado no slide 65.

TPC: Confirme que $(-b_1 + 2b_3, \frac{1}{2}b_2, -b_1 + b_3)$ é solução de $Ax = b$, para todo o $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 9 mencionámos as seguintes 8 propriedades das operações, **adição de vetores de $\mathbb{R}^n$** e **produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar**.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (**comutativa**)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (**associativa**)
3. $x + \vec{0} = x$ (**existência de el. neutro**)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (**existência de el. simétrico**)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (**distributiva...**)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (**distributiva...**)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (**compatibilidade dos produtos**)
8. $1x = x$ (**el. identidade da multiplicação por escalar**)

As propriedades anteriores significam que $\mathbb{R}^n$ **munido da adição de vetores e do produto de vetores por escalares** é um **espaço vetorial**. Como exemplo distinto de um espaço vetorial temos o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ munido das operações da adição de matrizes e produto de uma matriz por um escalar.

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Vamos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem **adicionar vetores de V** e **multiplicar vetores de V por escalares** sem sair de V , isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V .

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um **subespaço vetorial** de $\mathbb{R}^n$ se

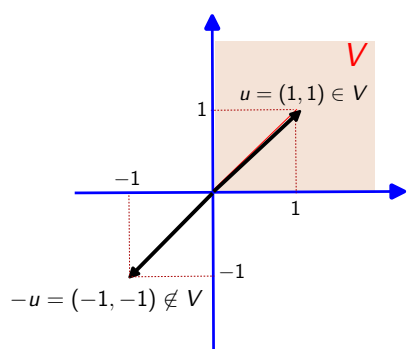
- ▶ $V \neq \emptyset$
- ▶ V é **fechado para a adição**, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- ▶ V é **fechado para o produto por escalar**, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

Observação

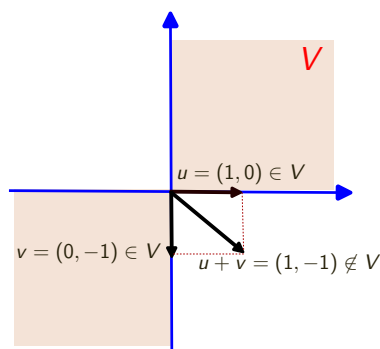
É imediato verificar que se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ ainda são válidas as propriedades (1), ..., (8) relativamente aos vetores de V , isto é, que **V munido** com as operações, **adição de vetores** e **multiplicação de vetores por escalares**, **herda a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$** .

- ▶ $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1º quadrante incluindo eixos coordenados): não vazio, fechado para a adição mas não para o produto por escalar $\Rightarrow$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
- ▶ $V = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ (1º e 3º quadrantes incluindo eixos coordenados): não vazio, fechado para o produto por escalar mas não para a adição $\Rightarrow$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.
- ▶ $V = \{(x, y) : x = y\}$ (bissetriz dos quadrantes ímpares): não vazio, fechado para a adição e para o produto por escalar $\Rightarrow$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

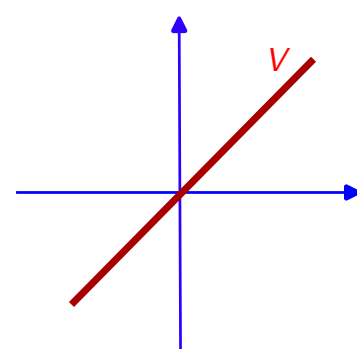
Ilustração do slide anterior



$V = \{(x, y) : x, y \geq 0\} \neq \emptyset$
 Não é fechado para o produto por escalar
 Logo não é subespaço vetorial



$V = \{(x, y) : xy \geq 0\} \neq \emptyset$
 Não é fechado para a adição
 Logo não é subespaço vetorial



$V = \{(x, y) : x = y\} \neq \emptyset$
 É fechado para a adição e para o produto por escalar (como veremos)
 Logo é subespaço vetorial