

Capítulo 2

Espaços vetoriais

ESPAÇO NULO

Exercício 14. Determine e interprete geometricamente o espaço nulo das seguintes matrizes.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

COMBINAÇÃO LINEAR, ESPAÇO GERADO E ESPAÇO DAS COLUNAS

Exercícios 15.

1. Escreva $(-3, 12, 12)$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (-1, 3, 1)$, $v_2 = (0, 2, 4)$ e $v_3 = (1, 0, 2)$.
2. Em cada uma das alíneas seguintes, verifique se o vetor u é combinação linear dos vetores de V .
 - a) $u = (3, -5)$, $V = \{(1, 2), (-2, 6)\}$;
 - b) $u = (1, 1, 1)$, $V = \{(1, 0, 1), (0, 3, 5)\}$;
 - c) $u = (2, -2, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $V = \{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 1), (0, 3, 1, 1)\}$;

-
- d) $u = (0, 1, 0, 1, 0)$, $V = \{(1, 2, 2, 1, 1), (\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, 1, \frac{2}{3})\}$.
3. Averigue se $(0, 1, 4) \in \langle (1, 3, -5), (2, 9, 4) \rangle$ e interprete geometricamente a situação.
4. Justifique que $(3, 1)$ está no espaço das colunas da matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ e escreva-o como combinação linear das colunas dessa matriz.
5. Determine os espaços das colunas relativos às matrizes do exercício 14.

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Exercícios 16.

- Decida sobre a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.
 - $\{(3, 1), (4, -2)\}$
 - $\{(3, 1), (4, -2), (7, 2)\}$
 - $\{(-1, 2, 0, 2), (5, 0, 1, 1), (8, -6, 1, -5)\}$
 - $\{(-1, 2, 0, 2), (5, 0, 1, 1), (8, -6, 1, -5), (0, 0, 0, 1)\}$
 - $\{(0, -3, 1), (2, 4, 1), (-2, 8, 5)\}$.
- Decida sobre a independência linear dos conjuntos de vetores,
 $U = \{(1, 2, -1, 0), (0, 2, 1, 0), (2, -1, 3, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ e
 $U' = \{(1, 2, -1, 0), (2, -1, 3, 0), (1, 1, 1, 1)\}$
- Mostre que o conjunto de vetores $\{(1, 0, 3, 1), (-1, 1, 0, 1), (2, 3, 0, 0), (1, 1, 6, 3)\}$ é linearmente dependente. Pode cada um dos vetores ser expresso como uma combinação linear dos restantes?
- Discuta, em função de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, a independência linear dos seguintes conjuntos de vetores.
 - $\{(1, -2), (\alpha, -1)\}$
 - $\{(\alpha, 1, 1), (1, \alpha, 1), (1, 1, \alpha)\}$
 - $\{0, \gamma, -\beta\}, (-\gamma, 0, \alpha), (\beta, -\alpha, 0)\}$.
- Sejam $\{v_1, v_2, v_3\}$ um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^n$ e $u_1 = v_1 + v_2$, $u_2 = v_1 + v_3$ e $u_3 = v_2 + v_3$. Justifique que $\{u_1, u_2, u_3\}$ é também linearmente independente.

BASE E DIMENSÃO

Exercícios 17.

1. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^2$:
 - a) $V = \{(1, -1), (3, 0)\}$
 - b) $U = \{(1, 1), (0, 2), (2, 3)\}$
 - c) $W = \{(1, 1), (8, 8)\}$.
2. Indique quais dos seguintes conjuntos são bases de $\mathbb{R}^3$.
 - a) $V = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (1, 0, 2)\}$
 - b) $U = \{(1, 0, 1), (2, 4, 8)\}$
 - c) $W = \{(3, 0, 1), (1, 1, 1), (4, 1, 2)\}$.
3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores $v_1 = (\alpha, 6, -1)$, $v_2 = (1, \alpha, -1)$ e $v_3 = (2, \alpha, -3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - a) Determine α de modo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.
 - b) Para um dos valores de α determinados em a), determine as componentes do vetor $(-1, 1, 2)$ em relação à base correspondente.

Exercício 18. Determine uma base e a dimensão do espaço nulo de cada uma das seguintes matrizes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \text{c) } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} & \text{e) } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. & \end{array}$$

Exercício 19. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = x_2 - 3x_3, x_3 = 2x_4\}.$$

- a) Mostre que V é subespaço vetorial.
- b) Indique uma base de V .

Exercícios 20. Indique uma base para cada um dos seguintes subespaços vectoriais.

1. O plano de $\mathbb{R}^3$ definido por $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$.
2. O hiperplano de $\mathbb{R}^5$ definido por $3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 9x_5 = 0$.

Exercício 21. Determine uma base para o espaço das colunas de cada uma das matrizes do exercício 18.

Exercício 22.

1. Calcule $\dim S$, com $S = \langle \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (3, -1, 2)\} \rangle$ e $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z - t = 0\}$.
2. Para que valores de α a dimensão do subespaço $S = \langle \{(1, \alpha, -1), (-1, 1, 1), (\alpha, 0, -1)\} \rangle$ é 3?

Exercício 23. Determine uma base e a dimensão dos subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados pelos seguintes conjuntos de vetores.

- a) $\{(1, 0, 2, 3), (7, 4, -2, 1), (5, 2, 4, 1), (3, 2, 0, 1)\}$
- b) $\{(1, 3, 2, -1), (2, 0, -1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 2, 0, 0), (5, 6, 2, 0)\}$

Exercício 24. Seja V o espaço vectorial gerado pelo conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$

$$\{(1, 0, 5), (1, 1, 1), (0, 3, 1), (-3, 0, -2)\}.$$

- a) Mostre que $V = \mathbb{R}^3$.
- b) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ contida no conjunto de vetores dado.
- c) Escreva o vetor $(-2, 3, 4)$ como combinação linear dos vetores da base obtida em b).

Exercício 25. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [u_1 | u_2 | u_3]$.

1. Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ o vetor $(\alpha, \alpha^2, 2)$ é combinação linear de u_1 , u_2 e u_3 ?
2. Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua os vetores u_1 e u_3 .

Exercícios 26.

1. Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Para cada um dos casos considerados na tabela seguinte, determine as dimensões de $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{N}(A^T)$.

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
$m \times n$	3×3	3×3	3×3	5×9	9×5	4×4	6×2
$\text{car}(A)$	3	2	1	2	2	0	2

2. Seja A uma matriz quadrada de ordem 3, cujo espaço das colunas define um plano de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem. Pode o espaço nulo de A determinar um plano que passa na origem? Justifique.

Exercícios 27.

1. Construa uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1, 1, 1)$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. Verifique que $v = (0, 3, 3, -1)$ pertence a $\mathcal{N}(A)$ e indique uma base de $\mathcal{N}(A)$ que inclua v .

3. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

- a) Resolva o sistema homogêneo $Ax = \vec{0}$ e indique a dimensão de $\mathcal{N}(A)$.
b) Mostre que $\{(1, 2, 0, -1) \text{ e } (-1, 3, 1, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

- c) Verifique que $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é solução do sistema $Ax = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, e mostre que se u é um vetor do espaço nulo de A , então $v + u$ é também solução do sistema.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, x_2 = x_3\}$

-
- (a) Descreva $\mathcal{N}(A)$ analítica e geometricamente.
- (b) Indique uma base e a dimensão de V .
- (c) Mostre que $\mathcal{C}(A) = V$.
5. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = Bx\}$.
- a) Mostre que S é um espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
- b) Indique uma base de S .
- c) Determine um vetor não nulo do espaço nulo de A que pertença a S .
- d) Mostre que se y é um vetor que pertence simultaneamente a S e ao espaço nulo de A , então y também pertence ao espaço nulo de B .

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 28.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 | v_2 | v_3]$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$.

- (a) Descreva, analítica e geometricamente, $\mathcal{C}(A)$.
- (b) Indique uma base e a dimensão de $\mathcal{C}(A)$.
- (c) Mostre que o vetor y pertence a $\mathcal{C}(A)$ e escreva-o como combinação linear dos vetores da base de $\mathcal{C}(A)$ indicada em b).
- (d) Indique um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença a $\mathcal{C}(A)$.
- (e) Indique $\dim \mathcal{N}(A)$.
- (f) Será $\{y, v_3\}$ uma base de $\mathcal{C}(A)$? Justifique.
- (g) Classifique o sistema $Ax = \vec{0}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

- (a) Determine $\mathcal{N}(A)$ e interprete-o geometricamente.
- (b) Indique uma base para $\mathcal{C}(A)$.
- (c) Indique $\text{car}(A)$.
- (d) Mostre que $\mathcal{N}(A) = \langle (-1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

3. Considere $V = \langle (1, 1, 0), (-1, 1, 1), (1, 3, 1) \rangle$.
 - (a) Indique $\dim V$.
 - (b) Mostre que $(2, 4, 1) \in V$.
 - (c) Indique uma matriz A tal que $\mathcal{C}(A) = V$.
4. Considere os vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (0, 3, 1)$.
 - (a) Indique vetores w e z distintos de u e v tais que $\langle u, v \rangle = \langle w, z \rangle$.
 - (b) Escreva uma matriz A quadrada de ordem 3 tal que $\mathcal{C}(A) = \langle u, v \rangle$.
 - (c) Determine $\mathcal{N}(A)$.
5. Sejam $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (2, -1, 0)$ e $v_4 = (1, 1, 0)$.
 - (a) Será $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linearmente independente?
 - (b) Será que $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \mathbb{R}^3$?
 - (c) Indique uma base para $\mathbb{R}^3$ constituída por vetores de $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.
6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
 - a) Determine uma base de $\mathcal{N}(A)$.
 - b) Determine uma solução do sistema $Ax = b$.
 - c) Seja x_0 a solução obtida em b). Verifique que para todo o vetor $u \in \mathcal{N}(A)$, $x_0 + u$ é solução de $Ax = b$ e prove que não existem mais soluções para o sistema $Ax = b$.
 - d) Interprete geometricamente o resultado obtido na alínea anterior.