

Subespaço minimal e subespaço maximal

As 3 condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ do slide 74 são trivialmente verificadas quando $V = \{\vec{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$, obtendo-se os seguintes 2 subespaços vetoriais especiais de $\mathbb{R}^n$:

- ▶ $\{\vec{0}\}$ subespaço vetorial **minimal** (ou **trivial**).
- ▶ $\mathbb{R}^n$ subespaço vetorial **maximal**.

Condição necessária para ser subespaço vetorial

Vamos agora estabelecer uma condição **necessária** (mas **não suficiente**) para um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definir um subespaço vetorial.

Teorema

Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

Demonstração: Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se:

- ▶ $V \neq \emptyset$, logo existe um vetor $v \in V$.
- ▶ V é fechado para o produto por escalar, logo $\lambda v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- ▶ Considerando, em particular, $\lambda = 0$, conclui-se que $0v = \vec{0} \in V$ como se pretendia. $\square$

Exemplo

Se V for a circunferência de raio 1, isto é, $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, V não é subespaço vetorial pois não contém a origem ($0^2 + 0^2 \neq 1$).

Espaço nulo de uma matriz

O seguinte conceito introduz o primeiro dos subespaços vetoriais fundamentais associados a matrizes que vamos considerar.

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se **espaço nulo de A** e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \vec{0}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- ▶ O espaço nulo de A corresponde ao CS do sistema linear $Ax = \vec{0}$, dito **homogéneo**, em que o vetor dos termos constantes é o **vetor nulo**.
- ▶ Um sistema homogéneo **nunca é impossível** uma vez que possui sempre a solução trivial $x = \vec{0}$ (pois $A\vec{0} = \vec{0}$). Em particular $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.

O espaço nulo é subespaço vetorial...

Teorema

Para toda a matriz $A_{m \times n}$, $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Tem-se:

- ▶ $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ como vimos no slide 79.
- ▶ $\mathcal{N}(A)$ **fechado para a adição**: se $u, v \in \mathcal{N}(A)$ então u e v são soluções de $Ax = \vec{0}$, isto é, $Au = Av = \vec{0}$ e portanto $A(u + v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que significa que $u + v$ é também solução de $Ax = \vec{0}$. Logo $u + v \in \mathcal{N}(A)$.
- ▶ $\mathcal{N}(A)$ **fechado para o produto por escalar** fica como exercício.

Logo é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ pois verifica 3 condições do slide 74. $\square$

Consequências

- Um conjunto definido por um sistema de equações lineares **homogêneas** com n variáveis é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois corresponde ao **espaço nulo** da matriz dos coeficientes desse sistema.

Por exemplo,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ pois também pode ser definido como,

$$V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Observação

Se alguma das equações lineares que definem V **não for homogênea**, então V **não é um subespaço vetorial** porque que não contém a origem.

Por exemplo, o plano de $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\}$, **não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$** porque não passa na origem $((0, 0, 0) \notin V)$.

Cálculo do espaço nulo

Para calcularmos o espaço nulo de uma matriz A , $\mathcal{N}(A)$, temos que resolver o sistema homogêneo $Ax = \vec{0}$, isto é, **reduzir a matriz ampliada** $[A | \vec{0}]$. Note-se que o vetor dos termos constantes pode ser omitido no método de Gauss uma vez que é sempre nulo!

Exercício - 1

Determinar o espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Reduzindo a matriz ampliada $[A | \vec{0}]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 = x_3, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0, 1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma **reta** de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui **uma** variável livre), que passa na **origem** (porque o sistema é **homogêneo**) com vetor diretor **$v = (0, 1, 1)$** .

Cálculo do espaço nulo (cont.)

Exercício - 2

Determinar o espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- ▶ Reduzindo a matriz ampliada $[A | \vec{0}]$ obtém-se,

$$[A | \vec{0}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array} \right] = [A' | \vec{0}].$$

Uma vez que **todas as colunas de A' têm pivot** o sistema $Ax = \vec{0}$ é **determinado** e portanto possui apenas **uma solução**, que tem que ser a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0, 0)\}$.

- ▶ Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$.

Em geral tem-se o seguinte.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ é determinado $\Leftrightarrow \text{car}(A) = n^{\circ}$ colunas de A .

Possíveis subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Pode-se provar que os subespaços vetoriais são de um dos seguintes tipos.

- ▶ Subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$):

$\{\vec{0}\}$, retas que passam na origem, $\mathbb{R}^2$.

- ▶ Subespaços vetoriais do espaço ($\mathbb{R}^3$):

$\{\vec{0}\}$, retas e planos que passam na origem, $\mathbb{R}^3$.

- ▶ Subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 4$:

$\{\vec{0}\}$, retas, planos, ... e hiperplanos que passam na origem, $\mathbb{R}^n$.

(um **hiperplano** é um conjunto definido por uma equação linear do tipo $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b$, com os coeficientes $a_1, \dots, a_n$, não todos nulos.)

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** (CL) de $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ chamam-se *coeficientes* da combinação linear.

Por outras palavras, b é CL de $v_1, \dots, v_n$ se puder ser obtido como **soma de múltiplos desses vetores**.

Exemplos de combinações lineares de vetores

► $(2, 4, -2) = 2(1, 0, 0) + 4(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3.$

► $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

- O vetor nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é sempre CL de qualquer conjunto de m vetores $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, pois

$$\vec{0} = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

e cada um dos vetores v_i é também sempre CL dos m vetores do conjunto $v_1, \dots, v_m$:

$$v_1 = 1 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

$$v_2 = 0 v_1 + 1 v_2 + \dots + 0 v_m,$$

$$\vdots$$

$$v_m = 0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 1 v_m.$$