

Como determinar combinações lineares?

Exemplo

Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $b = (2, 5, 1)$. Queremos determinar escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (caso existam) tais que $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Ora,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &\Leftrightarrow (2, 5, 1) = \alpha_1(2, 2, 1) + \alpha_2(2, 3, 1) \\ &\Leftrightarrow (2, 5, 1) = (2\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo (α_1, α_2) é solução, caso exista, do sistema cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] = [v_1 \ v_2 \mid b],$$

e podemos determinar os coeficientes α_1, α_2 aplicando o método de Gauss à matriz ampliada anterior.

Como determinar combinações lineares? (cont.)

- ▶ Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[v_1 \ v_2 \mid b]$, obtém-se

$$[v_1 \ v_2 \mid b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

- ▶ Como o sistema anterior é **PD**, os coeficientes α_1 e α_2 da CL **existem** e são **únicos**, isto é, **b é CL de v_1 e v_2 de uma única forma.**
- ▶ Para determinarmos α_1 e α_2 aplicamos a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \dashrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = & -2 \\ & \alpha_2 & = & 3 \end{cases}$$

- ▶ Logo a única forma de obter b como CL de v_1 e v_2 é,

$$b = (2, 5, 1) = -2(2, 2, 1) + 3(2, 3, 1) = -2v_1 + 3v_2.$$

Combinações lineares via sistemas lineares

Tem-se, de modo análogo, o seguinte resultado mais geral.

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n, b \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$.

Têm-se as seguintes equivalências:

- (i) $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
- (ii) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução do sistema $Ax = b$, isto é, do sistema linear cuja matriz ampliada é $[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n \mid b]$.

Tem-se a seguinte consequência imediata do resultado anterior.

Corolário

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** de $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se e só se o sistema $Ax = b$ for possível, onde $A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$.

Espaço gerado por um conjunto de vetores

Espaço gerado por um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Chama-se **espaço gerado** por $v_1, \dots, v_n$, denotado $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, ao subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \dots, v_n$, isto é,

$$\begin{aligned}\langle v_1, \dots, v_n \rangle &= \{b \in \mathbb{R}^m : b \text{ é CL de } v_1, \dots, v_n\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^m : b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \text{ com } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Exemplos

- ▶ $\langle \vec{0} \rangle = \{\alpha \vec{0} : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$ - **subespaço minimal**.
- ▶ $\langle \vec{v} \rangle = \{\alpha \vec{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$ com $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ - **reta de $\mathbb{R}^n$ que passa na origem com direção $\vec{v}$** .
- ▶ Considerando $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ obtém-se,

$$\begin{aligned}\langle e_1, e_2 \rangle &= \{\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 - \text{subespaço maximal}.\end{aligned}$$

Espaço das colunas de uma matriz

Definição

Chama-se **espaço das colunas** de uma matriz $A_{m \times n}$ ao conjunto,

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \right\}.$$

Observação

Denotando $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ tem-se pelo corolário do slide 89 que $Ax = b$ é possível se e só se b é CL de $v_1, \dots, v_n$ e portanto,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Por outras palavras, o espaço das colunas de uma matriz A é também o **espaço gerado pelos vetores que constituem as colunas de A** .

Teorema

Seja $A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$. Tem-se que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ é um **subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$** .

Exemplo revisitado

Consideremos novamente $v_1 = (2, 2, 1)$ e $v_2 = (2, 3, 1)$ do slide 87 e seja $A = [v_1 \ v_2]$. Vamos calcular

$$\mathcal{C}(A) = \{ b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : Ax = b \text{ é possível} \} = \langle v_1, v_2 \rangle.$$

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_3 \\ 0 & 1 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_3 \end{array} \right] = [A'|b'],$$

donde resulta que $Ax = b$ é possível se e só se $b_1 - 2b_3 = 0$. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle = \{ (b_1, b_2, b_3) : b_1 - 2b_3 = 0 \},$$

que define o plano de $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $x - 2z = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Deduz-se, em particular, que os **vetores de $\mathbb{R}^3$ que são CL de v_1 e v_2** , são os vetores **cujas abcissa x é o dobro da cota z** .

Por exemplo, $v = (2, 5, 1)$ é CL de v_1 e v_2 (cf. com o slide 88) e o vetor normal ao plano, $u = (1, 0, -2)$ não é CL de v_1 e v_2 .