

Espaço das colunas de uma matriz

Definição

Chama-se **espaço das colunas** de uma matriz $A_{m \times n}$ ao conjunto,

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \right\}.$$

Observação

Denotando $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$ tem-se pelo corolário do slide 89 que $Ax = b$ é possível se e só se b é CL de $v_1, \dots, v_n$ e portanto,

$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle.$$

Por outras palavras, o espaço das colunas de uma matriz A é também o espaço gerado pelos vetores que constituem as colunas de A .

Teorema

Seja $A_{m \times n} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$. Tem-se que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Algoritmo para determinar o espaço gerado/espaço das colunas

Algoritmo

Input: $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m \times n} = [v_1 \ \cdots \ v_n]$.

Objectivo: Determinar $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$, com $b = (b_1, \dots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ obtida a partir de $[A|b]$ com A' em escada. Podem ocorrer 2 casos:

- ▶ A' não possui linhas nulas. Neste caso $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$, isto é,

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m \quad (\text{subespaço maximal}).$$

- ▶ A' possui linhas nulas, digamos as linhas $k+1, \dots, m$. Nessa altura,

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \{(b_1, \dots, b_m) : b'_{k+1} = b'_{k+2} = \cdots = b'_m = 0\}.$$

Neste caso $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$ fica definido por um sistema linear homogéneo, que designamos por **sistema de equações definidoras**.

Exemplo 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (1, 3), (2, 4), (0, 1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$, com $b = (b_1, b_2)$ genérico obtém-se,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 3 & 4 & 1 & b_2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_2 - 3b_1 \end{array} \right] = [A'|b'].$$

Como A' não tem linhas nulas (1º caso do algoritmo do slide 92), $Ax = b$ é possível para todo o $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1, 3), (2, 4), (0, 1) \rangle = \mathbb{R}^2 \quad (\text{subespaço maximal}).$$

Exemplos (cont.)

Exemplo 2 (exemplo do slide 87 revisitado)

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2, 2, 1), (2, 3, 1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$, começando por trocar a 1ª com a 3ª linhas, obtém-se (verifique),

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b'_1 = b_3 \\ 0 & 1 & b'_2 = b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b'_3 = b_1 - 2b_3 \end{array} \right] = [A'|b'],$$

donde resulta que $Ax = b$ é possível se e só se $b'_3 = 0$ isto é, $b_1 - 2b_3 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

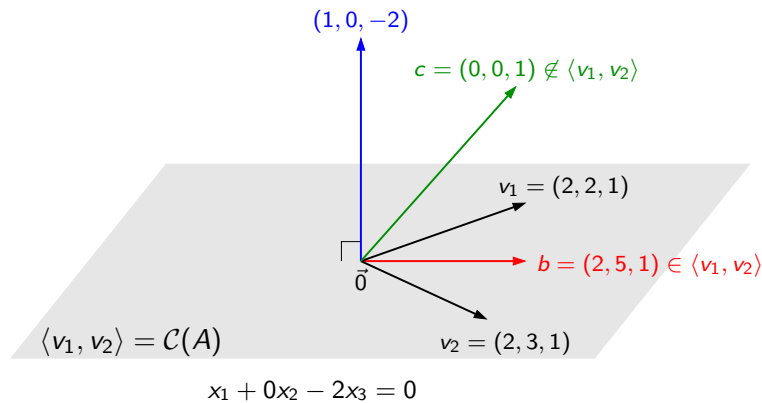
$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle = \{ (b_1, b_2, b_3) : b_1 - 2b_3 = 0 \},$$

que define o plano de $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $x - 2z = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Deduz-se, em particular, que os vetores de $\mathbb{R}^3$ que são CL de v_1 e v_2 , são os vetores cuja abcissa x é o dobro da cota z (cf. com o slide 88).

Interpretação geométrica

Os vetores que são CL de v_1 e v_2 são os vetores do espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é, os vetores $b = (b_1, b_2, b_3)$ que satisfazem a equação $b_1 - 2b_3 = 0$, isto é, que pertencem ao plano de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.



Por exemplo, o vetor normal ao plano $(1, 0, -2)$ e o vetor $c = (0, 0, 1)$ não são CL de v_1 e v_2 uma vez que não satisfazem a equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$. Já o vetor $b = (2, 5, 1)$ tem que verificar a equação uma vez que b é CL de v_1 e v_2 ($b = -2v_1 + 3v_2$ como vimos no slide 87).

Exemplos (cont.)

Exemplo 3

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2, 2, 3), (4, 4, 6) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 3 & 6 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array} \right] = [A'|b'].$$

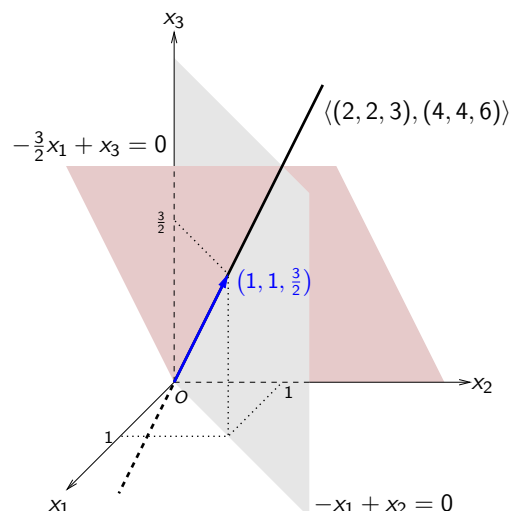
O sistema $Ax = b$ é possível se e só se $b_2 - b_1 = 0$ e $b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

$$\begin{aligned} V = \mathcal{C}(A) &= \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : b_2 - b_1 = 0, b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(b_1, b_1, \frac{3}{2}b_1 \right) : b_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b_1 \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) : b_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Exemplos (concl.)

Geometricamente, $V = \langle (2, 2, 3), (4, 4, 6) \rangle$ corresponde à **reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $(1, 1, \frac{3}{2})$** , obtida como interseção dos planos $-x_1 + x_2 = 0$ e $-\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



Observações importantes sobre $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$

Casos especiais

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Tem-se:

- ▶ $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço **minimal**) se e só se $Ax = \vec{0}$ for determinado se e só se $\text{car}(A) = n$ (número de colunas de A).
- ▶ $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m$ (subespaço **maximal**) se e só se $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se $\text{car}(A) = m$ (número de linhas de A).

Condições para um vetor pertencer a $\mathcal{N}(A)$ e a $\mathcal{C}(A)$

Ainda nas condições anteriores tem-se:

- ▶ Dado $v \in \mathbb{R}^n$, tem-se $v \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Av = \vec{0}$.
- ▶ Dado $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se $b \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ possível.

Independência linear de um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Tem-se sempre a CL nula de $v_1, v_2, \dots, v_n$ em que os coeficientes são todos nulos, dita **CL nula trivial**,

$$0 v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_n = \vec{0}.$$

Definição de independência linear

O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ diz-se **linearmente independente (l.i.)** se para quaisquer $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

se tem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Por outras palavras, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é l.i. se a **CL nula trivial** for a **única CL nula** de $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Se o conjunto não for l.i. diz-se **linearmente dependente (l.d.)**.

Independência linear - exemplos

- ▶ Seja $v = (1, 2)$. Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\alpha v = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha(1, 2) = (0, 0) \Leftrightarrow (\alpha, 2\alpha) = (0, 0) \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

Logo $\{v\}$ é **l.i.**

- ▶ Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$. Para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tem-se,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Logo $\{v_1, v_2\}$ é **l.i.**

- ▶ Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$. Tem-se $v_2 = 2 v_1$ e portanto

$$2 v_1 - v_2 = \vec{0}.$$

Como existe uma CL nula de v_1 e v_2 com os coeficientes **não todos nulos** ($\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -1$), conclui-se que $\{v_1, v_2\}$ é **l.d.**

- ▶ Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (2, 5, 1)$. Vimos no slide 87 que $v_3 = -2 v_1 + 3 v_2$ e portanto temos a CL nula, **não trivial**,

$$-2 v_1 + 3 v_2 - v_3 = \vec{0}.$$

Logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é **l.d.**

Critério de independência linear via Gauss

Vamos dar uma caracterização de independência linear que decorre da definição e do facto do vetores dos coeficientes das CL nulas de $v_1, \dots, v_n$ corresponderem às soluções do sistema linear homogéneo $[v_1 \ \dots \ v_n \mid \vec{0}]$.

Teorema

Sejam $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A_{m \times n} = [v_1 \ \dots \ v_n]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- ▶ $\{v_1, \dots, v_n\}$ é **linearmente independente**.
- ▶ $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ é **determinado**.
- ▶ $\text{car}(A) = n$, isto é, **todas as colunas de A' têm pivot**.

Exercício na aula

Considere $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α .

(In)dependência linear via sistemas lineares (cont.)

Resolução do exercício do slide anterior

Consideremos a matriz $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_2]{L_2 - \alpha L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 - \alpha^2 \\ 0 & -1 & 3 - \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 - \alpha^2 \\ 0 & 0 & 6 - \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

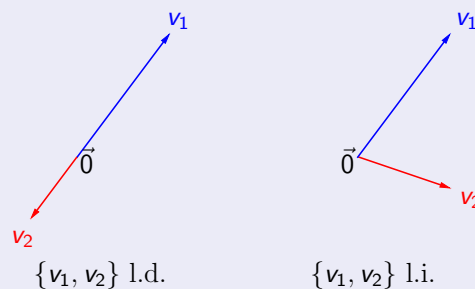
Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ **todas as colunas de A' têm pivot** $\Leftrightarrow 6 - \alpha - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-1)6}}{2(-1)}$ (F.R.) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.

Caracterização mais intuitiva de dependência linear

Como consequência do teorema do slide 101 prova-se facilmente o seguinte resultado, onde $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ (ver também o slide 100).

Teorema

- ▶ $\{v_1\}$ é l.d. se e só se $v_1 = \vec{0}$.
- ▶ $\{v_1, v_2\}$ é l.d. se e só se um dos vetores for múltiplo do outro vetor, isto é, os vetores forem colineares.



- ▶ Mais geralmente, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ com $n \geq 2$, é l.d. se e só se um dos vetores v_i for CL dos restantes $n - 1$ vetores do conjunto

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Como a característica de uma matriz $A_{m \times n} = [v_1 \ \cdots \ v_n]$, isto é, o número de pivots de A' , não pode ser superior ao número de linhas de A e

$$\{v_1, \dots, v_n\} \text{ l.i.} \Leftrightarrow \text{car}(A) = n,$$

deduz-se que se $\{v_1, \dots, v_n\}$ for l.i. então $n = \text{car}(A) \leq m$.
Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores.

- ▶ Por exemplo, considerando $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1, 4)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$, conclui-se imediatamente que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é linearmente dependente por ser constituído por $5 > 4$ vetores de $\mathbb{R}^4$.