Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A. Pelos algoritmos dos slides 114 e 113 tem-se:
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}(A)$ (nº de colunas sem pivot em A').
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$ (nº de colunas com pivot em A').
- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.}$$

No caso da matriz A do exercício 1 dos slides 112 e 116, tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = 2 + 2 = 4 = \text{nº de colunas de } A.$$

No caso da matriz A do exercício 2 do slide 118, tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = 0 + 3 = 3 = \text{nº de colunas de } A.$$

Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define.
- Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se o seguinte.

	dimensão do subespaço	tipo de subespaço vetorial
$\mathbb{R}^2$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	plano que passa na origem
	3	$\mathbb{R}^3$

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário, em função das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim V = 0$.
- $V = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n$.

Critério para definir base de um subespaço vetorial

- Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^m$ (cuja dimensão é m) são os conjuntos linearmente independententes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$ (conjuntos l.i. de vetores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade **máxima**)
- Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial V cuja dimensão se conhece!

Teorema

As bases de um subespaço vetorial V de dimensão $k > 0$ são os conjuntos linearmente independentes formados por k vetores de V([10]).

Nos exercícios podemos aplicar o teorema anterior com a seguinte formulação.

Teorema (Critério para definir base de V)

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k$, k vetores de $\mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base de** V se e só se verificar as seguintes 3 condições:

- $k = \dim V$.
- $v_1, \ldots, v_k \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

[10] Conjuntos l.i. de vetores de V de cardinalidade **máxima**.

Critério para definir base de um subespaço vetorial - exercício

Exercício

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Pelo critério do slide 121 basta verificar as seguintes condições:

- $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ (nº de vetores do conjunto). De facto, a matriz em escada A' obtida a partir de A tem 2 colunas sem pivot - confirme.
- $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$, pois $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ - confirme (ver o slide 98).
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, pois v_1 e v_2 são não colineares.

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.