Espaço das colunas de uma matriz

Definição

Chama-se espaço das colunas de uma matriz $A_{m\times n}$ ao conjunto,

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \right\}.$$

Observação

Denotando $A = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,]$ tem-se pelo corolário do slide 89 que $Ax = b$ é possível se e só se b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ e portanto,

$$\boxed{\mathcal{C}(A) \;=\; \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.}$$

Por outras palavras, o espaço das colunas de uma matriz A é também o espaço gerado pelos vetores que constituem as colunas de A.

Teorema

Seja $A_{m\times n} = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,]$. Tem-se que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ é um subepaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Algoritmo para determinar o espaço gerado/espaço das colunas

Algoritmo

`Input:` $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m\times n} = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$.
`Objectivo:` Determinar $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$, com $b = (b_1, \ldots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ obtida a partir de $[A|b]$ com A' em escada. Podem ocorrer 2 casos:

- A' não possui linhas nulas. Neste caso $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$, isto é,

  $$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m \quad \text{(subespaço maximal)}.$$

- A' possui linhas nulas, digamos as linhas $k+1, \ldots, m$. Nessa altura,

  $$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \left\{ (b_1, \ldots, b_m) : b'_{k+1} = b'_{k+2} = \cdots = b'_m = 0 \right\}.$$

  Neste caso $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$ fica definido por um sistema linear homogéneo, que designamos por sistema de equações definidoras.

Exemplos

Exermplo 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (1,3),(2,4),(0,1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$, com $b = (b_1, b_2)$ genérico obtém-se,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 3 & 4 & 1 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_2 - 3b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Como A' não tem linhas nulas (1º caso do algoritmo do slide 92), $Ax = b$ é possível para todo o $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1,3),(2,4),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2 \quad \text{(subespaço maximal)}.$$

Exemplos (cont.)

Exemplo 2 (exemplo do slide 87 revisitado)

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2,2,1),(2,3,1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$, começando por trocar a 1ª com a 3ª linhas, obtém-se (verifique),

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1' = b_3 \\ 0 & 1 & b_2' = b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_3' = b_1 - 2b_3 \end{array}\right] = [A'|b'],$$

donde resulta que $Ax = b$ é possível se e só se $b_3' = 0$ isto é, $b_1 - 2b_3 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

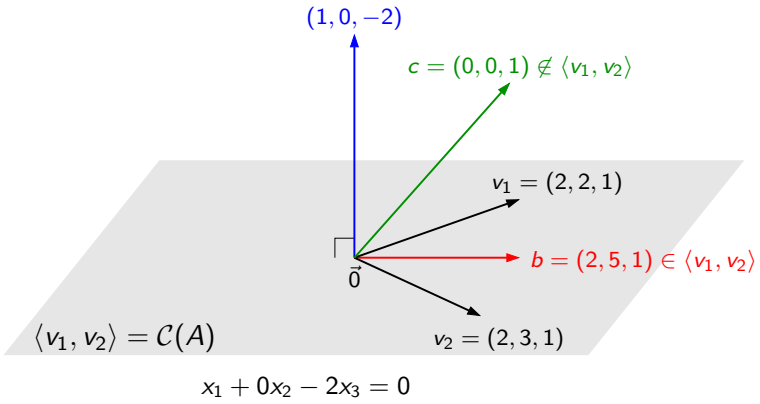
$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(b_1, b_2, b_3) \ : \ b_1 - 2b_3 = 0\},$$

que define o plano de $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $x - 2z = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Deduz-se, em particular, que os vetores de $\mathbb{R}^3$ que são CL de v_1 e v_2, são os vetores cuja abcissa x é o dobro da cota z (cf. com o slide 88).

Interpretação geométrica

Os vetores que são CL de v_1 e v_2 são os vetores do espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é, os vetores $b = (b_1, b_2, b_3)$ que satisfazem a equação $b_1 - 2b_3 = 0$, isto é, que pertencem ao plano de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.



Por exemplo, o vetor normal ao plano $(1, 0, -2)$ e o vetor $c = (0, 0, 1)$ não são CL de v_1 e v_2 uma vez que não satisfazem a equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$. Já o vetor $b = (2, 5, 1)$ tem que verificar a equação uma vez que b é CL de v_1 e v_2 ($b = -2v_1 + 3v_2$ como vimos no slide 87).

Exemplos (cont.)

Exemplo 3

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2,2,3), (4,4,6) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[\,A|b\,]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 3 & 6 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1' = b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

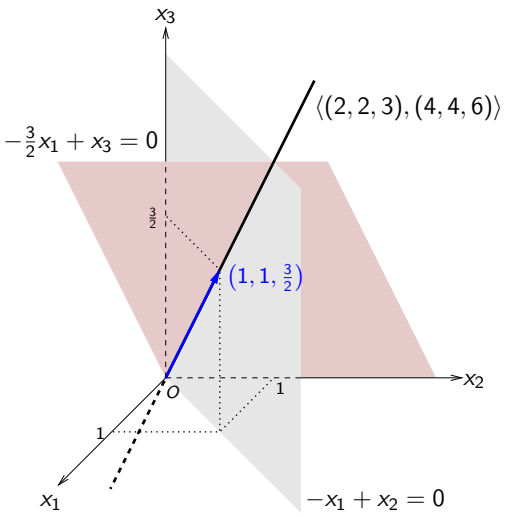
O sistema $Ax = b$ é possível se e só se $b_2 - b_1 = 0$ e $b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

$$\begin{aligned} V = \mathcal{C}(A) &= \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, b_2 - b_1 = 0,\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(b_1, b_1, \frac{3}{2}b_1 \right) \,:\, b_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b_1 \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \,:\, b_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\rangle. \end{aligned}$$

Interpretação geométrica

Geometricamente, $V = \langle (2,2,3), (4,4,6) \rangle$ corresponde à reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$, obtida como interseção dos planos $-x_1 + x_2 = 0$ e $-\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



Observações importantes sobre $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$

Casos especiais

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Tem-se:

- $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal) se e só se $Ax = \vec{0}$ for determinado se e só se $\text{car}(A) = n$ (número de colunas de A).
- $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m$ (subespaço maximal) se e só se $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se $\text{car}(A) = m$ (número de linhas de A).

Condições para um vetor pertencer a $\mathcal{N}(A)$ e a $\mathcal{C}(A)$

Ainda nas condições anteriores tem-se:

- Dado $v \in \mathbb{R}^n$, tem-se $v \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Av = \vec{0}$.
- Dado $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se $b \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ possível.

Independência linear de um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Tem-se sempre a CL nula de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em que os coeficientes são todos nulos, dita CL nula trivial,

$$0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_n = \vec{0}.$$

Definição de independência linear

O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

se tem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por outras palavras, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é l.i. se a CL nula trivial for a única CL nula de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Se o conjunto não for l.i. diz-se linearmente dependente (l.d.).

Independência linear - exemplos

- Seja $v = (1, 2)$. Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

  $$\alpha\, v = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \alpha(1,2) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; (\alpha, 2\,\alpha) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0.$$

  Logo $\{v\}$ é l.i.

- Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$. Para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tem-se,

  $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 + 3\,\alpha_2 = 0 \\ 2\,\alpha_1 + 4\,\alpha_2 = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \cdots \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

  Logo $\{v_1, v_2\}$ é l.i.

- Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$. Tem-se $v_2 = 2\, v_1$ e portanto

  $$2\, v_1 - v_2 = \vec{0}.$$

  Como existe uma CL nula de v_1 e v_2 com os coeficientes não todos nulos ($\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -1$), conclui-se que $\{v_1, v_2\}$ é l.d.

- Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (2, 5, 1)$. Vimos no slide 87 que $v_3 = -2\, v_1 + 3\, v_2$ e portanto temos a CL nula, não trivial,

  $$-2\, v_1 + 3\, v_2 - v_3 = \vec{0}.$$

  Logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.d.