Observação

Aplicando o resultado do slide 89 com $b = \vec{0}$, obtém-se o seguinte resultado.

Corolário

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array}\right]$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} &\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ solução de } \left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & \cdots & v_n & \vec{0} \end{array}\right] \\ &\Leftrightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

Voltando aos exemplos do slide anterior tem-se:

- No caso em que $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ obtém-se $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right]$.
- No caso em que $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$, $2v_1 - v_2 = \vec{0}$ e portanto $(2, -1) \in \mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right]$.
- No caso em que $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (2, 5, 1)$, tem-se $-2v_1 + 3v_2 - v_3 = \vec{0}$ e portanto $(-2, 3, -1) \in \mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right]$.

Critério de independência linear via Gauss

Vamos dar uma caracterização de independência linear usando o método de Gauss :) que decorre imediatamente das observações do slide anterior.

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A_{m\times n} = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array}\right]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.
- $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ é determinado.
- $\text{car}(A) = n$, isto é, todas as colunas de A' têm pivot.

Exercício na aula

Considere $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α.

(In)dependência linear via sistemas lineares (cont.)

Resolução do exercício do slide anterior

Consideremos a matriz $A = [v_1\ v_2\ v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 - L_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 6-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ todas as colunas de A' têm pivot $\Leftrightarrow$ $6-\alpha-\alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)6}}{2(-1)}$ (F.R.) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Como a característica de uma matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, isto é, o número de pivots de A', não pode ser superior ao número de linhas de A e pelo teorema do slide 102 tem-se a relação,

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ l.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{car}(A) = n,$$

deduz-se que se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for l.i. então $n = \text{car}(A) \leq m$. Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores.

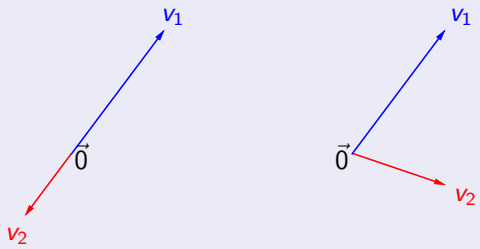
- Por exemplo, considerando $v_1 = (1,2,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1,1)$, $v_3 = (1,3,1,4)$, $v_4 = (0,0,1,1)$ e $v_5 = (0,0,0,1)$, conclui-se imediatamente que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é linearmente dependente por ser constituído por $5 > 4$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

Caracterização mais intuitiva de **dependência linear**

Como consequência do teorema do slide 102 prova-se facilmente o seguinte resultado, onde $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ (ver também o slide 101).

Teorema

- $\{v_1\}$ é l.d. se e só se $v_1 = \vec{0}$.
- $\{v_1, v_2\}$ é l.d. se e só se um dos vetores for múltiplo do outro vetor, isto é, os vetores forem colineares.



$\{v_1, v_2\}$ l.d. $\quad$ $\{v_1, v_2\}$ l.i.

- Mais geralmente, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com $n \geq 2$, é l.d. se e só se um dos vetores v_i for CL dos restantes $n-1$ vetores do conjunto

Conceitos de base e dimensão de um subespaço vetorial

Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto finito de vetores de V que (i) não contém vetores "redundantes" no sentido em que nenhum dos vetores da base se pode obter como CL dos restantes vetores da base, mas (ii) contém vetores "suficientes" de modo a que todo o vetor de V se possa escrever como CL dos vetores da base([8]).

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k$ vetores de V.
Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base** de V se verificar as condições:

(i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

(ii) $v_1, \ldots, v_k$ geram V, isto é, $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Teorema-definição

Todas as bases de um mesmo subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores a que chamamos dimensão de V e denotamos por $\dim V$.

[8] Note-se que as CL de vetores de V ainda são vetores de V porque V é um subespaço vetorial, logo fechado para o produto por escalares e para a adição.

Exemplos

- O subespaço vetorial $V = \langle (1,1,1) \rangle = \{\alpha(1,1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ define a reta que passa na origem com direção $(1,1,1)$ e admite a base $\{v\}$, com $v = (1,1,1)$. De facto:
  (i) $\{v\}$ é linearmente independente pois $v \neq \vec{0}$.
  (ii) v gera V pois por definição $V = \langle v \rangle$.
  Em particular, dim V = número de vetores da base = 1.
- O subespaço maximal $\mathbb{R}^3$ admite a dita base canónica, $\{e_1, e_2, e_3\}$, onde
$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad \text{e} \quad e_3 = (0,0,1),$$
são as colunas da matriz identidade de ordem 3. De facto:
  (i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente, pois
$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0).$$
  (ii) e_1, e_2, e_3 geram $\mathbb{R}^3$. De facto:
$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle &= \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \ : \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) \ : \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \ : \ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$
  Em particular, dim $\mathbb{R}^3$ = número de vetores da base = 3.

Como construir bases para subespaços vetoriais?

Um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ pode ser definido das seguintes 4 formas:

- $V = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal).
- $V = \mathbb{R}^n$ (subespaço maximal).
- *Gerado por um conjunto de vetores* / *espaço das colunas de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \langle (1,1,0,1), (1,2,-1,0), (1,0,1,2), (2,1,1,3) \rangle$,
$$\text{ou seja,} \quad V = \mathcal{C}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
- *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas* / *espaço nulo de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 6x_2 = 0\}$,
$$\text{ou seja,} \quad V = \mathcal{N}(A), \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos ver a seguir como obter bases em cada um destes 4 casos.

Base e dimensão dos subespaços minimal e maximal

Base e dimensão do subespaço mininal

Convenciona-se que $\{\}$ é a (única) base do subespaço mininal $\{\vec{0}\}$. Uma vez que esta base não possui vetores tem-se,

$$\boxed{\dim\{\vec{0}\} = 0}$$

A base canónica de $\mathbb{R}^3$ do slide 107 generaliza-se para $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário.

Base canónica e dimensão do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ formado pelas n colunas da matriz identidade I_n,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^n$ que se designa por base canónica (b.c.), tendo-se

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$$

Em particular, qualquer outra base para $\mathbb{R}^n$ terá que possuir também n vetores.

Caracterização das bases de um subespaço maximal

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ e $A = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]$, que é uma matriz quadrada de ordem n. Aplicando os casos especiais do slide 98 obtêm-se as equivalências:

$$\begin{aligned} \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ l. i.} &\Leftrightarrow \operatorname{car}(A) = n = m \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle. \end{aligned}$$

Logo por definição de base provámos o seguinte resultado.

Teorema (Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$)

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.
- $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$.