Bases do subespaço maximal

Conjugando o teorema do slide anterior com o teorema do slide 104 obtém-se a seguinte resultado.

Corolário

As bases de $\mathbb{R}^n$ são os conjuntos linearmente independentes com n vetores, isto é, os conjuntos lin. indep. de cardinalidade máxima([9]).

Exemplo na aula

Quais dos seguintes conjuntos é lin. indep. / gera $\mathbb{R}^3$ / base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,0,0),(2,5,0)\}$. sim / não / não
2. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,0)\}$. não / não / não
3. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9)\}$. sim / sim / sim
4. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9),(x,y,z)\}$. não / sim / não

[9] E são também os conjuntos de geradores de $\mathbb{R}^n$ de cardinalidade mínima.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - exemplo

Sejam $v_1 = (1,1,-1)$, $v_2 = (0,2,-1)$, $v_3 = (2,0,-1)$, $v_4 = (4,2,-3)$ e $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$. Vamos determinar uma base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $\left[\, A \,|\, b \,\right]$, com $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ vetor genérico, obtém-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1 \end{array}\right]$$

Uma base para $\mathcal{C}(A)$ (contida no conjunto original de geradores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$) é dada pelo subconjunto $\{v_1, v_2\}$ das colunas de A (a vermelho) que correspondem às colunas com *pivot* na matriz em escada A'. De facto:

- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente porque os seus elementos estão associados às colunas com *pivot* na matriz em escada A'.
- v_1 e v_2 geram $\mathcal{C}(A)$ porque os subespaços $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix})$ e $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ coincidem, uma vez que são ambos definidos pela mesma equação $b_3 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1 = 0$([10]).

Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = $ nº de pivots de $A' = \text{car}(A) = 2$.

[10] A sequência de operações elementares no método de Gauss e as linhas nulas em A' apenas dependem das colunas de A associadas às colunas com *pivot* em A'.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - algoritmo

Usando o mesmo tipo de argumentos do slide 112 deduz-se o algoritmo abaixo para obter bases do espaço gerado/espaço das colunas, contidas no conjunto inicial de geradores (não é preciso ampliar com o vetor b).

Algoritmo

`Input:` $A = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A:
$$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- O subconjunto das colunas de A que correspondem às colunas com pivot em A' constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \ldots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \text{car(A)}.}$$

Base para o espaço nulo/CS de um sistema homogéneo

Algoritmo

`Input:` Matriz A do tipo $m \times n$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{N}(A)$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A \,|\, \vec{0}]$.
Seja k o número de variáveis livres do sistema, isto é, o número de colunas sem *pivot* em A'.
- Se $k = 0$, isto é, se não há variáveis livres então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e portanto $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.
- Se $k > 0$, aplicar a fase ascendente do método de Gauss a $[A' \,|\, \vec{0}]$ e associar a cada variável livre a solução particular de $Ax = \vec{0}$ em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.
O conjunto destas k soluções de $Ax = \vec{0}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \text{nº de variáveis livres} = n - \text{car}(A)}$$

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercícios

Exercício 1

Determinar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz do slide 112,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

TPC

Determinar uma base do hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Ideia: aplicar o algoritmo do slide anterior a $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Resolução do exercício 1 do slide anterior

Aplicando a fase descendente à matriz $[\,A \mid \vec{0}\,]$ obtém-se (verifique),

$$[\,A|\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [\,A'|\vec{0}\,]$$

Logo o sistema $Ax = \vec{0}$ admite $k = 2 > 0$ variáveis livres (x_3 e x_4).
Aplicando a fase ascendente do método de Gauss à matriz $[\,A' \mid \vec{0}\,]$ vem

$$[\,A' \mid \vec{0}\,] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rrcl} x_1 & 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ & x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Logo $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 = x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\}$.

- Tomando $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$ tem-se $x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4 = -2$ e $x_2 = x_3 + x_4 = 1$, obtendo-se a solução de $Ax = \vec{0}$, $\boxed{w_1 = (-2, 1, 1, 0)}$.
- Analogamente, tomando $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$ tem-se $x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4 = -4$ e $x_2 = x_3 + x_4 = 1$, obtendo-se a solução de $Ax = \vec{0}$, $\boxed{w_2 = (-4, 1, 0, 1)}$.

Pelo algoritmo do slide 114, $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ tendo-se ainda $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nº de variáveis livres} = 2$.

Observações sobre a resolução do exercício 1

Vejamos que a base $\{w_1, w_2\}$ de $\mathcal{N}(A)$ que foi construída usando o algoritmo do slide 114 verifica as duas condições da definição de base de um subespaço vetorial:

- $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. De facto, considerando uma CL nula arbitrária $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \vec{0}$, tem-se trivialmente

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\cdots, \cdots, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0, 0),$$

  obtendo-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
- w_1 e w_2 geram $\mathcal{N}(A)$. De facto, qualquer solução particular w de $Ax = 0$, obtida tomando $x_3 = a$ e $x_4 = b$,

$$w = (2a - 4b, a + b, a, b),$$

  corresponde à CL $a w_1 + b w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle$ (verifique).

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercícios (cont.)

Exercício 2

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$. Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Note-se que neste caso $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$, uma vez que não há linhas nulas na matriz em escada A'. Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = 3$.