Nota prévia

- Os slides de apoio às aulas teóricas baseiam-se na matéria da sebenta Texto de Apoio de Álgebra Linear e vários dos seus esquemas e/ou figuras provêm da sebenta ou são versões modificadas de esquemas e figuras da sebenta.

- A matéria exposta nestes slides deve ser complementada com a leitura dessa sebenta.

Vetores do **plano** ($\mathbb{R}^2$) e vetores do **espaço** ($\mathbb{R}^3$)

- Recordemos que $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais.
- O conjunto dos vetores do plano é o conjunto dos vetores com 2 componentes reais que se denota por $\mathbb{R}^2$, ou seja,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

  Por exemplo, $(1, -\pi) \in \mathbb{R}^2$.

- Analogamente, o conjunto dos vetores do espaço é o conjunto dos vetores com 3 componentes reais, denotado $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

  Por exemplo, $(1, -\pi, 0) \in \mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^n$ - conjunto dos vetores com n componentes

- Em geral, dado um inteiro $n \geq 2$, denotamos o conjunto dos vetores com n componentes reais por $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\},$$

  onde x_i é a componente do vetor x que se encontra na posição i.

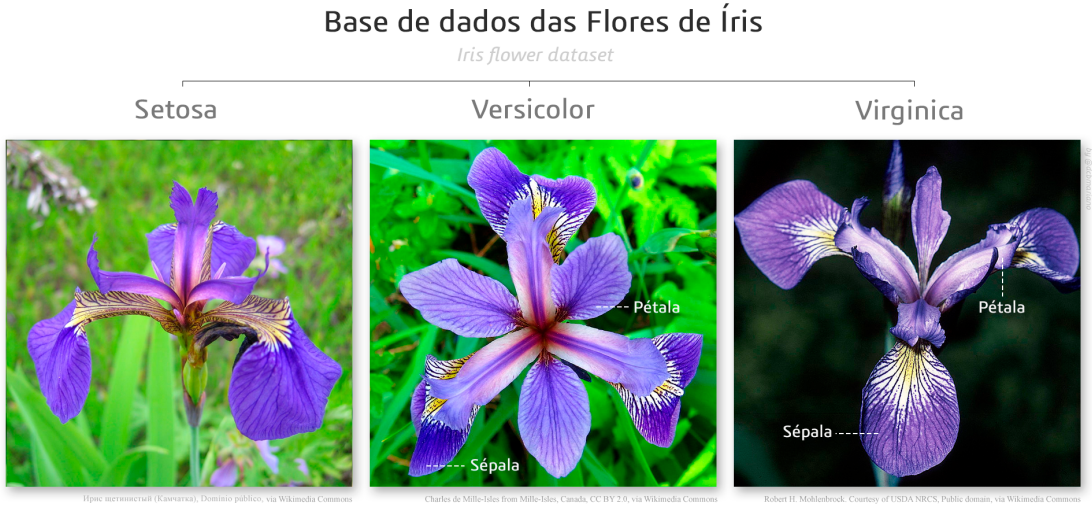
  Por exemplo, se $x = (1, -\pi, 0, 2, 3, -4) \in \mathbb{R}^6$, tendo-se $x_4 = 2$.

- Os números reais serão também designados por *escalares* por oposição a vetores

Porque queremos estudar conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$?
E como "visualizar" esses conjuntos?

Um famoso conjunto de dados

Ronald Fisher, um famoso estatístico mediu os comprimentos e larguras das sépalas e pétalas (em `cm`) de 50 lírios de cada 3 espécies distintas, *Setosa*, *Versicolor* e *Virgínica*.



(https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_dados_flor_Iris#/media/Ficheiro:Flores_de_Iris.png)

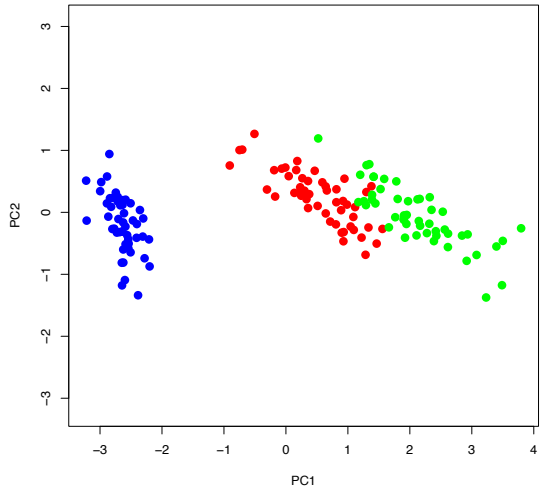
A tabela a seguir apresenta os valores obtidos para alguns dos lírios.

	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
150	5.9	3.0	5.1	1.8	virginica

O melhor retrato do conjunto de dados dos lírios

O conjunto de dados dos 150 lírios origina uma núvem de 150 pontos num espaço a 4 dimensões que não conseguimos visualizar, em que o vetor de coordenadas de cada ponto contém o comprimento e a largura das sépalas e pétalas de cada lírio (vetor com 4 componentes).

Usando métodos de Álgebra Linear podemos projetar esta núvem de pontos num plano de modo a obter-se o melhor retrato possível, no sentido em que melhor preserva as distâncias originais entre as flores, ou equivalentemente, a **variabilidade** do conjunto:



Pode-se observar no retrato que, por exemplo, os comprimentos e as larguras das sépalas e pétalas diferenciam claramente os lírios da espécie *Setosa* dos lírios das restantes 2 espécies *Versicolor* e *Virgínica* Este tipo de conjuntos de dados são estudados em áreas tais como a Estatística Multivariada, áreas essas que usam de forma crucial de diversos conceitos e resultados de Álgebra Linear.

Operações sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$)

Recordemos as operações algébricas bem conhecidas sobre vetores do plano ($\mathbb{R}^2$). Se $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

- Adição de vetores:

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

- Produto de um vetor por um escalar:

$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

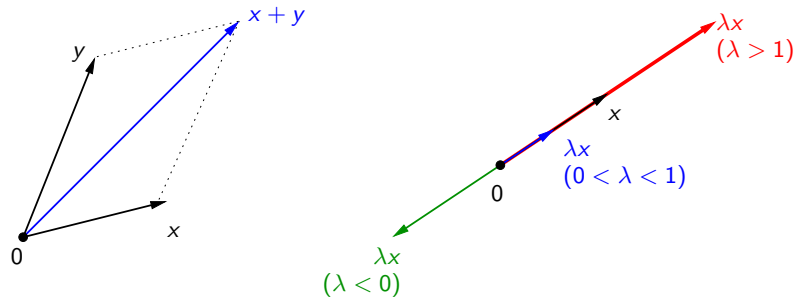
- Produto escalar (ou interno) de vetores:

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Por exemplo, se $x = (3, 1)$, $y = (2, 5)$ e $\lambda = 2$, obtém-se

$$x + y = (5, 6), \quad 2(3, 2) = (6, 4), \quad (3, 1) \cdot (2, 5) = 11.$$

Interpretação geométrica das operações sobre vetores



(a) (b)

Para todos os vetores não nulos do plano, x e y, tem-se a relação bem conhecida,

$$\cos(\theta) = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|},$$

onde θ é o ângulo formado por x e y. Resulta, em particular, da relação anterior a chamada desigualdade de Cauchy-Schwarz (C.-S.),

$$|\, x \cdot y \,| \leq \|x\| \, \|y\|,$$

onde $\|x\|$ e $\|y\|$ são os comprimentos do vetores x e y, respetivamente.

A extensão das operações algébricas para vetores com um número arbitrário de componentes faz-se de modo óbvio.

Operações sobre vetores de $\mathbb{R}^n$

Definição

- Adição de vetores:

  $$x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

  isto é, somam-se as componentes homólogas dos vetores

- Produto de um vetor por um escalar:

  $$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, \lambda x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

  isto é, multiplicam-se todas as componentes do vetor pelo escalar

- Produto escalar (ou interno) de vetores:

  $$x \cdot y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$

  sendo ainda válida a desigualdade de C.-S. neste caso o que nos permite, em particular, definir ângulo entre vetores de $\mathbb{R}^n$

Propriedades das operações sobre vetores

Adição de vetores e o produto de vetores por escalares verificam várias propriedades que decorrem imediatamente das propriedades dos números reais (falaremos mais adiante nas propriedades do produto escalar).

Propriedades das operações algébricas

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos...)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

Conceito de matriz

Definição de matriz

Sejam m, n inteiros positivos. Chama-se matriz do tipo $m \times n$ *a uma coleção $A = [a_{ij}]$ de mn números reais dispostos em m linhas e n colunas,*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} .$$

a_{ij}: elemento da matriz que se encontra na linha i e coluna j da matriz

O índice i percorre as linhas da matriz e designa-se por índice de linha *O índice j percorre as colunas da matriz e designa-se por* índice de coluna

As matrizes constituem uma extensão dos vetores adequada ao estudo dos sistemas lineares

Exemplos

- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$

  O elemento de A que se encontra na linha 4 e coluna 1 é a_{41} =5

- $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ definida por $a_{1j} = 10$ e $a_{2j} = \pi$, para todo o j, é

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ \pi & \pi & \pi \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

- $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ definida por $a_{ij} = i + j$, para $i, j = 1, 2, 3$, é

$$A = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2+1 & 2+2 & 2+3 \\ 3+1 & 3+2 & 3+3 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matriz-linha e matriz-coluna ou vetor

- Se $m = 1$, $A_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-linha*.
  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ matriz-linha do tipo 1×3.
- Se $n = 1$, $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ designa-se por *matriz-coluna* ou *vetor*.
  Por exemplo, $(2, 3, -1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$
  - Em geral, $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser representado como m-uplo de números reais ou como matriz-coluna do tipo $m \times 1$:

$$x = (x_1, \cdots, x_m) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Matriz definida por vetores e matriz quadrada

- Se $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$ denota a matriz do tipo $m \times n$ cujas colunas são os n vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

  Por exemplo, se $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-1, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 10, 0)$,

$$A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

- Se uma matriz A é do tipo $n \times n$, A diz-se *quadrada de ordem n*.

  Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ anterior é quadrada de ordem 3.

  - Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ ao conjunto dos elementos a_{ii}, $i = 1, \ldots n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Matriz triangular e matriz diagonal

$A = [a_{ij}]$ matriz quadrada de ordem n

- A diz-se *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ para $i > j$, ou seja, se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é triangular superior de ordem 3.

- A definição de *triangular inferior* é análoga e fica como exercício.

- A diz-se *diagonal* se $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, isto é, se todos os elementos fora da diagonal principal de A forem nulos, e pode ser representada por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

  Por exemplo, $\text{diag}(2, -1, 3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal de ordem 3.

Matriz escalar e matriz identidade

- Uma matriz diagonal A de ordem n diz-se *escalar* se todas as entradas da diagonal principal forem iguais entre si, isto é, se para algum $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$A = \text{diag}(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

- Se $\lambda = 1$, A designa-se por *matriz identidade de ordem n* e denota-se por I_n (ou simplesmente por I). A matriz identidade representa o elemento neutro da multiplicação de matrizes como veremos mais adiante

  Por exemplo, a matriz identidade de ordem 3 é a matriz

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Igualdade entre matrizes e matriz transposta

- $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ do mesmo tipo dizem-se *iguais* se os elementos homólogos forem iguais, isto é, se $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$

  Por exemplo, $\begin{bmatrix} 5 & x \\ y & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & 3 \\ 2 & w \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 5 \\ w = 6 \end{cases}$

- A *transposta* de $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ é a matriz $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$ do tipo $n \times m$, cujas colunas são as linhas de A pela mesma ordem.

  Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

  Tem-se, obviamente, $(A^T)^T = A$.

- $A = [a_{ij}]$ quadrada diz-se *simétrica*, se $A^T = A$, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

  Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ é simétrica.

Operações algébricas sobre matrizes: adição de matrizes

As operações algébricas sobre matrizes estendem as operações da adição de vetores, do produto de um vetor por um escalar e do produto escalar de vetores definidas anteriormente.

Se $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ são matrizes do mesmo tipo define-se a *soma de A com B*, por

$$A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}.$$

Por outras palavras, os elementos de $A + B$ obtêm-se somando os elementos homólogos de A e de B.

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+0 & -1+2 & 0+1 \\ 4-3 & 5+1 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Produto de uma matriz por um escalar

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ define-se o *produto de A pelo escalar λ*, por

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

Por outras palavras, λA obtém-se multiplicando cada elemento de A por λ

Se $\lambda = -1$, λA denota-se simplesmente por $-A$

Por exemplo, se $\lambda = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix}$, então

$$\lambda A = 3 \begin{bmatrix} 20 & -1 & 13 \\ 18 & -2 & 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 20 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 13 \\ 3\cdot 18 & 3\cdot(-2) & 3\cdot 81 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -3 & 39 \\ 54 & -6 & 243 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes e do produto de escalares por matrizes

Sejam A, B e C matrizes do tipo $m \times n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + [0]_{m\times n} = A$ ($[0]_{m\times n}$ matriz cujos elementos são todos nulos)
4. $A + (-A) = [0]_{m\times n}$
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
8. $1.A = A$
9. $(A + B)^T = A^T + B^T$
10. $(\lambda A)^T = \lambda\, A^T$
11. $(A^T)^T = A$

Propriedades das operações algébricas sobre matrizes

A matriz nula $[0]_{m\times n}$ é portanto o elemento neutro da adição de matrizes.

As propriedades (1)-(8) decorrem das propriedades da adição e do produto de números reais e são análogas às propriedades da adição e do produto por escalar para vetores.

As restantes três propriedades são evidentes.

Exercício na aula

- Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e I_2 a matriz identidade de ordem 2. Simplifique expressão $((A^T + B)^T + 4I_2)^T$ indicando as propriedades do slide anterior que utilizar e calcule o seu valor.

TPC

Mostre que se A é uma matriz quadrada então $A + A^T$ é simétrica.

Produto de matrizes

- Duas matrizes A e B dizem-se *encadeadas*, se

$$\text{número de colunas de } A = \text{número de linhas de } B.$$

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4}$ são encadeadas pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Mas B e A não são encadeadas !

Definição do produto de matrizes

Se $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ são encadeadas, define-se o *produto* de A por B, denotado AB, como sendo a matriz $C = [c_{ik}]_{m\times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ik} &= (\text{linha } i \text{ de } A) \cdot (\text{coluna } k \text{ de } B) \\ &= (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \cdot (b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}. \end{aligned}$$

Produto de matrizes

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ são encadeadas, tendo-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & -1 \\ \hline 4 & 5 & 0 \\ \hline 1 & 8 & 5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} 2+8+0 & -2+16-5 \\ 4+10+0 & -4+20+0 \\ 1+16+0 & -1+32+25 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 14 & 16 \\ 17 & 56 \end{bmatrix}_{3\times 2}
\end{aligned}
$$

Por exemplo, o elemento de AB que se encontra na linha 3 e coluna 1 é o produto escalar da terceira linha de A pela primeira coluna de B, isto é, $(1,8,5)\cdot(1,2,0) = 17$.

Produto escalar via produto de matrizes...

- O produto de matrizes estende o conceito de produto escalar de vetores: se $x, y \in \mathbb{R}^n$ então

$$\boxed{x^T y = x \cdot y}$$

Por exemplo, se $x = (-1, 1, 3) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $y = (1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$x^T y = [-1 \;\; 1 \;\; 3]_{1\times 3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times 1} = [(-1,1,3)\cdot(1,0,1)]_{1\times 1} = [2]_{1\times 1} = 2(^1) = x\cdot y$$

- Note-se que $xy^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3\times 1} [1 \;\; 0 \;\; 1]_{1\times 3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

[1] As matrizes 1×1 identificam-se com a seu único elemento.

Potência de uma matriz quadrada

Potência inteira não negativa

Dada uma matriz quadrada A de ordem n definem-se as *potências inteiras não negativas de A* por,

$$A^0 = I_n \qquad \text{e} \qquad A^k = \underbrace{A \cdots A}_{\text{k vezes}} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

TPC

Calcular A^3 com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Propriedades

Propriedades do produto de matrizes

Sejam A, B, C matrizes, I a matriz identidade de ordem conveniente, $[0]$ a matriz nula de tipo conveniente e $\lambda \in \mathbb{R}$ e k um inteiro não negativo. Sempre que as operações estejam definidas, tem-se:

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributiva)
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva)
4. $AI = IA = A$ (el. neutro da mult.)
5. $A[0] = [0]A = 0$ (el. absorvente da mult.)
6. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ (compatibilidade dos produtos)
7. $(AB)^T = B^T A^T$ (!)
8. $(A^k)^T = (A^T)^k$

"Não propriedades" do produto de matrizes

Ao contrário do que sucede com a adição, algumas propriedades do produto de números reais **não se generalizam** para o produto de matrizes.

Exercício na aula

Calcular os produtos AB e BA com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

O que observa ?

"Não propriedades" do produto de matrizes

- O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, em geral,

$$AB \neq BA.$$

- A lei do anulamento do produto também não é válida, ou seja, em geral,

$$AB = [\,0\,] \quad \not\Rightarrow \quad (A = [\,0\,] \text{ ou } B = [\,0\,]).$$

- A lei do corte também não é válida ou seja, em geral, dadas matrizes A, B e C, com $A \neq [\,0\,]$([2]),

$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C.$$

($[\,0\,]$ denota uma matriz nula de ordem conveniente)

TPC

Dar exemplos de 3 matrizes quadradas de ordem 2, A, B e C, para as quais a lei do corte falhe

[2] Para a lei do corte ser válida para matrizes devemos substituir a condição $A \neq [\,0\,]$ por A invertível, conceito que daremos mais adiante.

Uma consequência inesperada...

Se A e B são matrizes quadradas da mesma ordem não permutáveis, isto é, $AB \neq BA$, obtém-se aplicando as propriedades distributivas do produto de matrizes,

- $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 \neq A^2 - B^2$.
- $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - BA + B^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$.

A não comutatividade do produto de matrizes teve como consequência que não são válidos para o produto de matrizes quadradas os análogos dos casos notáveis da multiplicação de números reais!

Observação

Deve-se ter uma particular atenção ao simplificar expressões que envolvam produtos de matrizes!

Simplificação de expressões...

Exercício na aula

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}_{2\times 1}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}_{1\times 2}.$$

Desenvolva e calcule $((BC)^T + A)^2$.

Ainda o produto de matrizes...

Observação

(i) Se $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix}$ então

$$AB = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_p \end{bmatrix},$$

ou seja, a k-ésima coluna do produto AB é o produto de A pela k-ésima coluna de B (do tipo $n \times 1$) - produtos à direita "atuam nas colunas"...

(ii) Transpondo o resultado do ponto anterior, conclui-se que a i-ésima linha do produto AB é o produto da linha i de A (do tipo $1 \times n$) pela matriz B - produtos à esquerda "atuam nas linhas"...

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = [v_1 \quad v_2]$,

com $u_1 = (1,0,2)$, $u_2 = (3,1,-1)$, $v_1 = (-1,0,3)$ e $v_2 = (1,1,2)$, tem-se que

$$AB = A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{(i)}}{=\!=} \begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} v_1 & \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} \begin{bmatrix} u_1^T v_1 & u_1^T v_2 \\ u_2^T v_1 & u_2^T v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sistema de equações lineares

Sistema linear

Um sistema linear a m equações e n variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é um sistema de equações da forma,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$: *coeficiente da variável* x_j *na* i*-ésima equação*.
- $b_i \in \mathbb{R}$: *termo constante* ou *membro direito* da i-ésima equação.

- *Solução* de um sistema linear é uma solução comum a todas as equações desse sistema.

Exemplo de um sistema linear a 3 equações e 3 variáveis

$$\begin{cases} 2\,x_1 + \,x_2 + 2\,x_3 = 3 \\ 4\,x_1 + 6\,x_2 + 6\,x_3 = 4 \\ -2\,x_1 - \,x_3 = -3 \end{cases}$$

Com a notação do slide anterior tem-se, por exemplo,

- $a_{11} = 2$: coeficiente da variável x_1 na primeira equação
- $a_{23} = 6$: coeficiente da variável x_3 na segunda equação
- $b_2 = 4$: termo constante ou membro direito da segunda equação
- $b_3 = -3$: termo constante ou membro direito da terceira equação

Conjunto de soluções e classificação de um sistema linear

Resolver um sistema linear é determinar o seu conjunto de soluções (CS).
Um sistema linear é *classificado* como:

- **impossível** (IMP) se não possuir soluções
- **possível** se possuir pelo menos uma solução, sendo:
  - **determinado** (PD), se possuir uma única solução
  - **indeterminado** (PI), se possuir uma infinidade de soluções

Por exemplo, o sistema linear a 2 equações e 2 variáveis,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{cases}$$

é PD com $CS = \{(2, 1)\}$ (verifique!).

- Dois sistemas lineares a m equações e n variáveis dizem-se *equivalentes* se possuem o mesmo conjunto de soluções (CS).

Matriz ampliada de um sistema a m equações e n variáveis

Consideremos o sistema linear a m equações e n variáveis,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ chama-se *matriz dos coeficientes* do sistema linear,
- $b = (b_1, \ldots, b_m)$ chama-se o *vetor dos termos constantes* ou *membros direitos* do sistema,
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$ chama-se *vetor das incógnitas* ou *variáveis* do sistema e finalmente,
- $[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$, chama-se *matriz ampliada do sistema* e contém toda a sua informação relevante

Matriz em escada e matriz reduzida

- Uma matriz diz-se em *escada* se o primeiro elemento não nulo de cada linha, que se designa por *pivot*, estiver à direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior e todas as linhas nulas, caso existam, aparecerem no fim
- Uma matriz diz-se *reduzida* se
  - estiver em escada,
  - todos os pivots forem iguais a 1,
  - em cada coluna com pivot apenas o pivot é não nulo.

Exemplos de matrizes em escada e reduzida com os pivots a vermelho,

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Um sistema linear diz-se em *escada/reduzido* se a respectiva matriz dos coeficientes estiver em escada/reduzida.

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

(I) "Apagador" - Adicionar a uma linha i uma linha $j \neq i$ multiplicada por um escalar λ ($L_i + \lambda L_j$).

(II) Multiplicar uma linha i por um escalar $\lambda \neq 0$ (λL_i).

(III) Permutar uma linha i com uma linha j ($L_i \leftrightarrow L_j$).

A notação entre parênteses é uma simplificação da notação usada no Texto de Apoio!

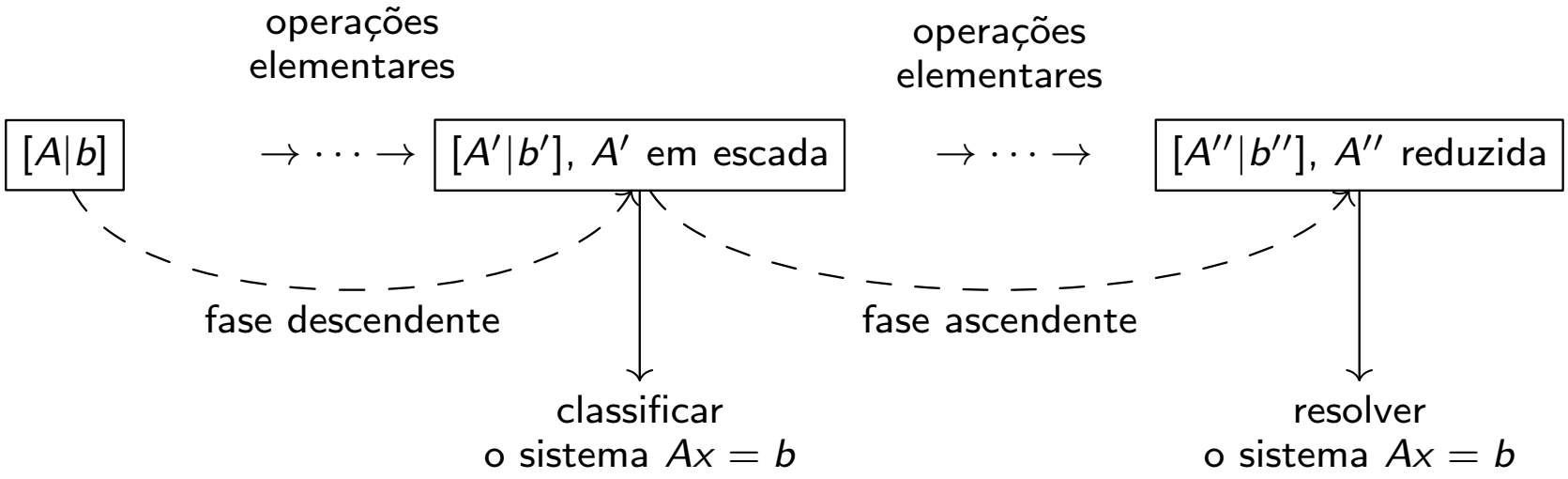
Teorema

As operações elementares (I), (II) e (III) transformam a matriz ampliada de um sistema linear na matriz ampliada de um sistema linear equivalente, ou seja, com o mesmo CS.

Definem-se de modo análogo operações elementares sobre as equações de um sistema linear.

Método de eliminação de Gauss para redução de sistemas

O método de eliminação de Gauss desenvolve-se em duas fases (descendente e ascendente), aplicando operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear, de acordo com o seguinte esquema:



Exemplificação do método de Gauss

Exemplo na aula

Vejamos como se processa o método de eliminação de Gauss no sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$$

que representa a intersecção de 3 planos em $\mathbb{R}^3$.

TPC

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 = -3 \end{cases} \qquad (b) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Redução do sistema: fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema do exemplo do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 8 & -4 & 12 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \underline{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \underline{4} & -5 & 9 \\ 0 & 0 & \underline{6} & -6 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Matriz dos coeficientes A' em **escada** $\Rightarrow$ podemos classificar o sistema:

- Todas as linhas de $[A'|b']$ correspondem a equações possíveis, isto é, não são do tipo $0\ 0\ 0 \mid *$ com $* \neq 0$([3]). Logo o sistema é possível.
- Todas as colunas de A' têm *pivot* e portanto não há variáveis livres([4]). Logo o sistema é determinado e o CS é um ponto em $\mathbb{R}^3$.

[3] Que correspondem à equação impossível $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = *$.

[4] Cada variável fica determinada por uma equação.

Conclusão da redução do sistema: fase ascendente

$$
\begin{aligned}
[A'|b'] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{6}L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow[L_2+5L_3]{L_1-2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{4}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
&\xrightarrow{L_1+L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] = [A''|b''].
\end{aligned}
$$

Matriz dos coeficientes A'' está **reduzida** e $[A''|b'']$ corresponde à matriz ampliada do sistema reduzido,

$$
\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}
$$

Logo, $\text{CS} = \{(2, 1, -1)\}$.

Método de eliminação de Gauss

Exercícios na aula

Aplicando o método de Gauss reduza os seguintes sistemas lineares:

(a)
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

(b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Redução do sistema do exercício (a): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema (a) do slide anterior obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 + L_1]{L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - 4L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \underline{2} & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & -2 & -2 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em **escada**, tendo-se:

- Não há linhas do tipo $0\ 0\ 0\ 0\,|\,*$ com $* \neq 0$, isto é, não há equações impossíveis.
- A 4ª coluna de A' não tem pivot logo x_4 é variável livre, isto é, pode tomar qualquer valor.

Logo o sistema é **possível indeterminado** (PI).

Redução do sistema do exercício (a): fase ascendente

Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss à matriz em escada $[A'|b']$ do slide anterior obtém-se:

$$[A'|b'] = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 - L_3]{L_1 - 2L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [A''|b''] \dashrightarrow \begin{cases} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & -x_4 & = & -1 \\ & & x_3 & +x_4 & = & 1 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes A'' está em **reduzida**. Passando nas duas últimas equações a variável livre x_4 para o membro direito, podemos escrever as variáveis *pivot* (a azul) à custa da variável livre x_4, obtendo-se

$$CS = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \ : \ x_1 = 1, \ x_2 = -1 + x_4, \ x_3 = 1 - x_4, \ x_4 \in \mathbb{R}\},$$

que possui uma infinidade de soluções.

Cada atribuição de um valor para a variável livre x_4 dá origem a uma solução distinta do sistema. Por exemplo, se $x_4 = 0$, obtém-se a solução $(1, -1, 1, 0)$.

Variáveis *pivot* e variáveis livres

Observação

- As variáveis associadas às colunas sem *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis livres e podem tomar qualquer valor em $\mathbb{R}$.
- As variáveis associadas às colunas com *pivot* na matriz em escada designam-se por variáveis *pivot* ou variáveis determinadas e são escritas em função das variáveis livres.

Redução do sistema do exercício (b): fase descendente

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada (b) do slide 41 obtém-se:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

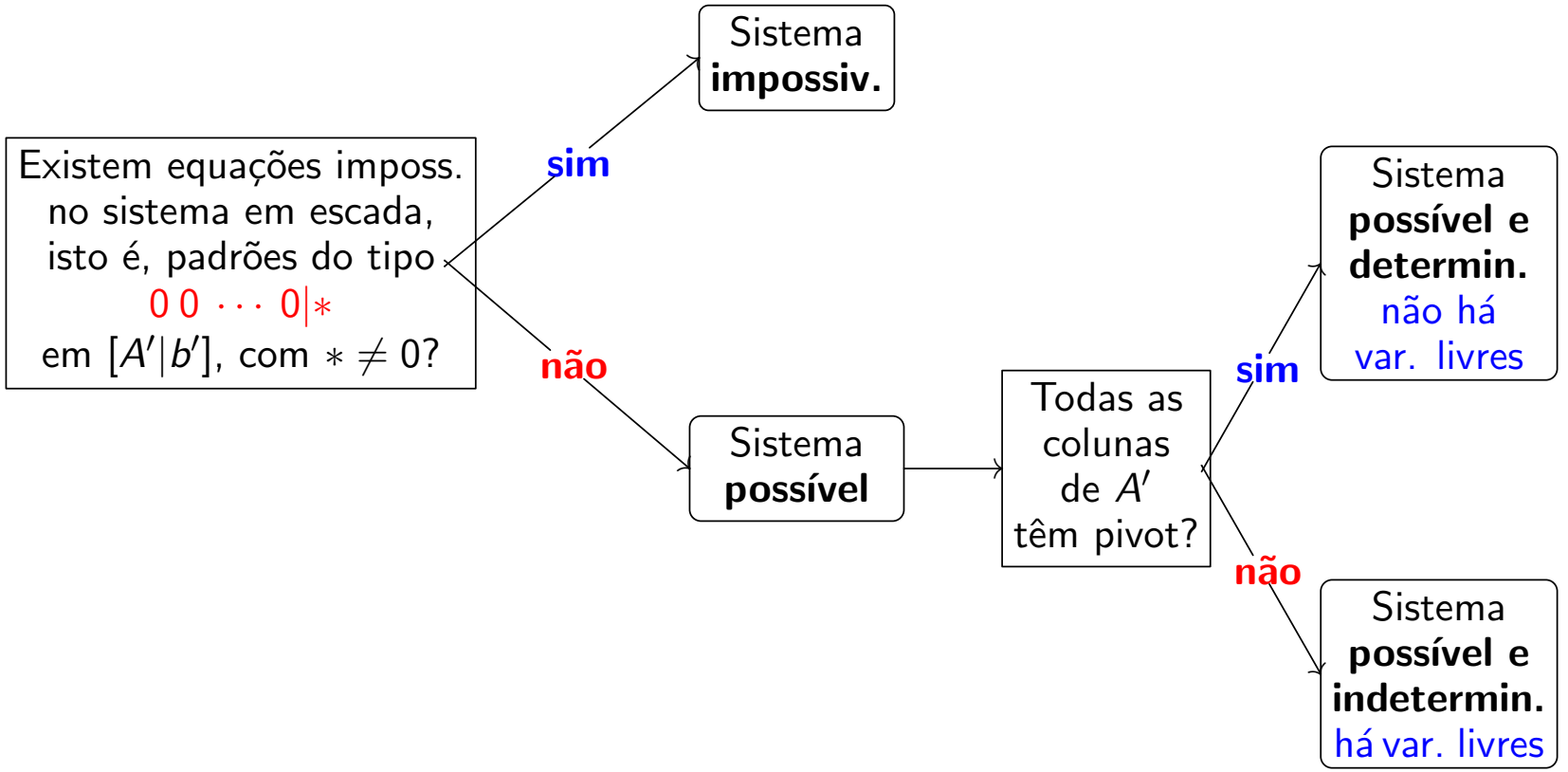
$$\xrightarrow{L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = [A'|b'], \quad \text{com } A' \text{ em escada.}$$

- A última linha da matriz $[A'|b']$ corresponde à equação impossível

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2,$$

e portanto o sistema é **impossível** (IMP) e $CS = \emptyset$.

Resumo da classificação de um sistema em escada



Algoritmo de eliminação de Gauss: fase descendente

- **Input:** Matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema linear
- **Objectivo:** Redução do sistema linear
- **Fase descendente:**
  - Aplicando operações elementares do tipo III trocar, se necessário, linhas em $[A|b]$ de modo a que o pivot da primeira linha se encontre na coluna não nula mais à esquerda da matriz dos coeficientes
  - Usando operações elementares do tipo I ("Apagador") e o pivot da primeira linha, eliminar os restantes elementos da coluna abaixo desse pivot
  - Repetir os procedimentos anteriores relativamente à submatriz que se obtém ignorando a primeira linha e assim sucessivamente enquanto existirem linhas não nulas na matriz dos coeficientes dessa submatriz

No final da fase descendente obtém-se uma matriz $[A'|b']$ com A' em escada e podemos classificar o sistema.

A matriz $[A'|b']$ **não é única**, i.e, depende das operações efetuadas.

Algoritmo de eliminação de Gauss: fase ascendente

- **Fase ascendente:** (apenas se aplica aos sistemas possíveis)
  - Usando operações elementares do tipo II e I tornar o pivot que se encontra mais à direita na matriz A' igual a 1 e usar esse pivot para eliminar os elementos da coluna acima desse pivot
  - Repetir os procedimentos do passo anterior relativamente à coluna com pivot imediatamente anterior e assim sucessivamente enquanto existirem colunas com pivot (percorrendo a matriz da direita para a esquerda)

  No final da fase ascendente obtém-se uma matriz $[A''|b'']$ com A'' reduzida, donde resulta imediatamente o CS do sistema, escrevendo as variáveis pivot em função das variáveis livres. Observemos que:
  - A matriz $[A''|b'']$ é **única**, isto é, não depende da sequência de operações elementares efectuada

Consequência

Dois sistemas com m equações lineares e n variáveis são **equivalentes** se e só se aplicando o método de Gauss às respetivas matrizes ampliadas obtemos **a mesma matriz reduzida**.

Produto de matrizes e sistemas lineares

- Vamos agora mostrar que certo tipo de equações matriciais que envolvem o produto de matrizes são equivalentes a sistemas lineares.
- A relação referida no ponto anterior vai permitir, em particular, manipular e resolver sistemas lineares usando as operações com matrizes.
- Para ilustrar as ideias dos pontos anteriores vamos começar por considerar um pequeno exemplo[5].

[5] O exemplo dado no próximo slide é distinto do exemplo que foi dado nas aulas teóricas.

Sistemas lineares e equações matriciais - exemplo

- Consideremos a equação matricial $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Tem-se,

$$Ax = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 6x_2 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases},$$

o que mostra que o sistema linear acima, cuja matriz ampliada é $[A|b]$, também pode ser representado pela equação matricial $Ax = b$.

Sistemas lineares e equações matriciais - caso geral

Mais geralmente, pode-se mostrar que um sistema linear arbitrário com matriz ampliada $[A|b]$ é equivalente à equação matricial $Ax = b$, isto é,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Consequência

Podemos definir um sistema linear de 3 formas distintas:

- a partir de um conjunto finito de equações lineares;
- a partir de uma equação matricial do tipo $Ax = b$;
- a partir de uma matriz ampliada $[A|b]$.

Em particular, tem-se que uma solução de um sistema linear com matriz ampliada $[A|b]$ corresponde a uma solução da equação matricial $Ax = b$, isto é, a um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = b$, onde n é o número de variáveis do sistema.

Interpretação geométrica de sistemas de equações lineares

- Um sistema linear a m equações e n variáveis representa a **intersecção** de:
  - m retas no plano ($\mathbb{R}^2$) se $n = 2$;
  - m planos no espaço ($\mathbb{R}^3$), se $n = 3$;
  - m hiperplanos em $\mathbb{R}^n$, se $n \geq 4$.

- Iremos principalmente interpretar sistemas lineares com 2 e 3 variáveis, ou seja, cujos **CS** estão contidos no plano e no espaço, tendo-se:
  - Se o número de variáveis livres([6]) for zero, **CS** é um **ponto** (PD);
  - Se o número de variáveis livres for um, **CS** é uma **reta** (PI);
  - Se o número de variáveis livres for dois, **CS** é um **plano** (PI).

[6] O número de variáveis livres é também designado por *grau de indeterminação do sistema.*

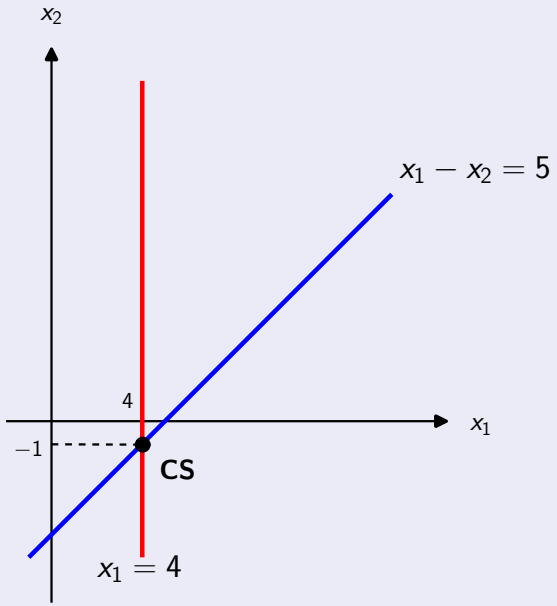
Interpretação geométrica de sistemas lineares - exemplos

Exemplo 2×2

O sistema a **2** equações e **2** variáveis,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

é PD (não possui variáveis livres) e geometricamente representa a **interseção** de **duas retas** no **plano** ($\mathbb{R}^2$), concorrentes no ponto $(4, -1)$, tendo-se portanto **CS** $= \{(4, -1)\}$ (ver a figura). .



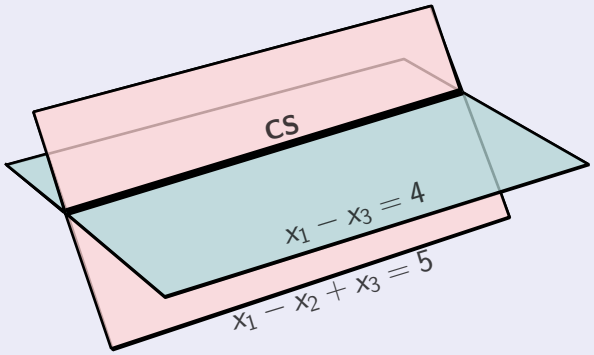
Interpretação geométrica de sistemas lineares - exemplos

Exemplo 2×3

O sistema a **2** equações e **3** variáveis,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

é PI (possui a variável livre x_3) e geometricamente representa a **interseção** de **dois planos** no **espaço** ($\mathbb{R}^3$), concorrentes numa **reta** (porque possui **uma** variável livre),

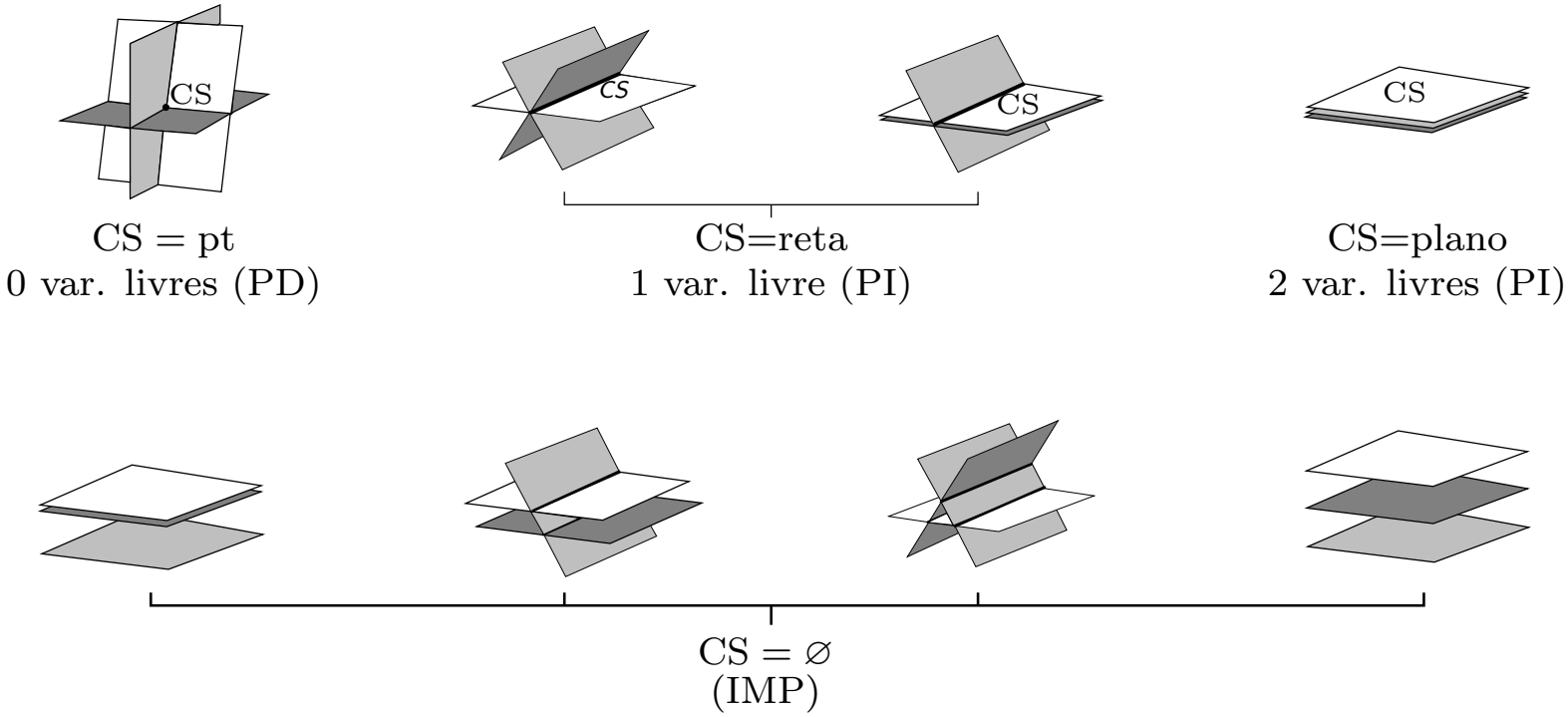


que corresponde ao **CS** do sistema, tendo-se

$$\mathbf{CS} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 4 + x_3,\ x_2 = -1 + 2x_3, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Sistemas lineares a 3 equações e 3 variáveis (3×3)

- Um sistema a 3 equações e 3 variáveis representa a **interseção** de 3 planos no espaço ($\mathbb{R}^3$) e geometricamente existem 8 casos distintos:



Desafio :)

Dar exemplos de sistemas com 3 equações e 3 variáveis para cada um dos 8 casos anteriores

Inversa de uma matriz

Definição de inversa

Uma matriz **quadrada** A de ordem n diz-se *invertível* ou *não singular* se existir uma matriz quadrada B da mesma ordem que A tal que

$$AB = I_n \qquad \text{e} \qquad BA = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n. Caso contrário, A diz-se *singular*. A matriz B, quando existe, designa-se por *inversa* de A.

Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é invertível com inversa $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

De facto, tem-se

$$AB = \left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ \hline 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

$$BA = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ \hline -3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Resulta ainda da definição que B é também invertível com inversa A.

Observações

- Pode-se mostrar que

$$AB = I_n \quad \Rightarrow \quad BA = I_n,$$

e que

$$BA = I_n \quad \Rightarrow \quad AB = I_n.$$

- Logo para mostrar que A é invertível **basta** encontrar uma matriz quadrada B da mesma ordem que A que verifique uma das relações:

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

Nessa altura, B é inversa de A.

Exercícios na aula

- Mostre que se B é inversa de A^2 então AB é inversa de A
- Mostre que se $A_{n\times n}$ verifica $A^3 - 3A - I_n = 0$ então A é invertível.

Unicidade da inversa

Proposição

A inversa de uma matriz A, quando existe, é única e denota-se por A^{-1}.

Demonstração da proposição

Temos que mostrar que se B e C forem inversas arbitrárias de A então têm que ser iguais. Como B é inversa de A tem-se, em particular,

$$BA = I.$$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade à direita por C tem-se

$$BAC = C,$$

donde resulta imediatamente $B = C$ uma vez que $AC = I$. $\square$

Por exemplo, considerando as matrizes do exemplo do slide 56, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Inversa de matrizes diagonais

Vamos calcular inversa da matrix diagonal $\text{diag}(2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (caso exista). Para isso temos que determinar uma matriz quadrada de ordem 2, $B = [b_{ij}]$, tal que $AB = I_2$ (caso exista). Ora,

$$\begin{aligned} AB = I_2 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2\,b_{11} & 2\,b_{12} \\ 3\,b_{21} & 3\,b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2} \\ b_{12} = b_{21} = 0 \\ b_{22} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \text{diag}(2^{-1}, 3^{-1}). \end{aligned}$$

Logo $\text{diag}^{-1}(2,3) = \text{diag}(2^{-1}, 3^{-1})$. Mais geralmente temos o seguinte.

Proposição

A matriz diagonal $\text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é invertível se e só se $a_1, a_2, \ldots, a_n \neq 0$, tendo-se nessa caso

$$\text{diag}^{-1}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \text{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

Inversa de uma matriz 2×2 não diagonal

- Consideremos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Para determinar a sua inversa, caso exista, vamos resolver a equação matricial,

$$AX = I_2,$$

cuja solução corresponde à inversa de A. Pela unicidade da inversa a solução, caso exista, tem que ser única.

- Escrevendo, $X = [\, x \quad y \,] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$ e $I_2 = [\, e_1 \quad e_2 \,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, tem-se

$$\begin{aligned} AX = I_2 &\Leftrightarrow A\,[\, x \quad y \,] = [\, e_1 \quad e_2 \,] \\ &\Leftrightarrow [\, Ax \quad Ay \,] = [\, e_1 \quad e_2 \,] \quad \text{(ver o slide 30)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Ax = e_1 \quad \dashrightarrow \quad [A|e_1] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \\ Ay = e_2 \quad \dashrightarrow \quad [A|e_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Redução simultânea de sistemas lineares e inversa

- Podemos reduzir simultaneamente ambos os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$, uma vez que possuem a mesma matriz de coeficientes A, ampliando A com e_1, e_2, isto é, com a matriz identidade I_2. Aplicando a fase descendente obtém-se então,

$$[\,A \mid I_2\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{cases}$$

  Logo ambos os sistemas $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são PD e portanto $AX = I_2$ tem solução única (que é a inversa de A). Em particular, A é invertível.

- Aplicando a fase ascendente tem-se,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{-L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

  Logo as soluções de $Ax = e_1$ e $Ay = e_2$ são $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, obtendo-se finalmente

$$A^{-1} = X = [\,x \quad y\,] = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Inversa e redução simultânea de sistemas (caso geral)

- De modo análogo pode-se mostrar que resolver a equação matricial $AX = I_n$ com A matriz arbitrária de ordem n, equivale a resolver n sistemas lineares com matrizes ampliadas

$$[\,A \,|\, e_1\,], \quad [\,A \,|\, e_2\,], \quad \cdots, \quad [\,A \,|\, e_n\,], \tag{1}$$

  onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ são as n colunas da matriz identidade I_n.

- Como os n sistemas têm a mesma matriz de coeficientes A podem ser reduzidos simultaneamente aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A \,|\, e_1\ e_2\ \cdots\ e_n\,] = [\,A \,|\, I_n\,]$.

- Pela **unicidade da inversa**, um dos dois casos tem que ocorrer:
  - os n sistemas (1) são todos PD - nessa altura A é invertível e as n colunas de A^{-1} são as soluções dos n sistemas (1);
  - pelo menos um dos n sistemas (1) é impossível - nessa altura A é singular.

- A redução simultânea de sistemas pode também ser aplicada para resolver equações matriciais mais gerais, do tipo $AX = B$, aplicando o método de Gauss à matriz ampliada $[\,A \,|\, B\,]$...

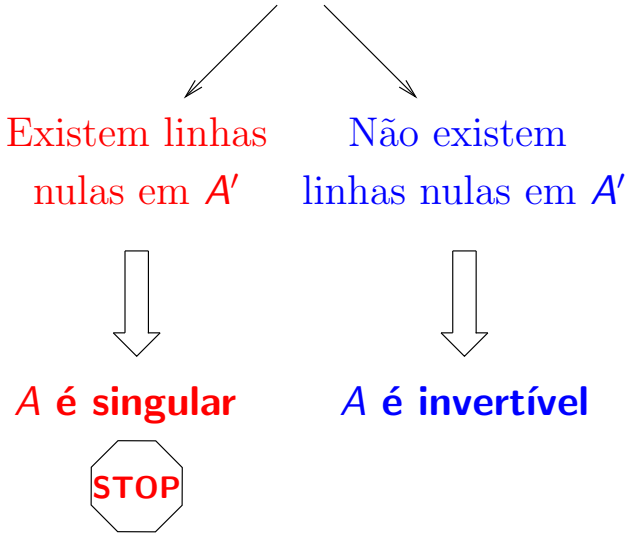
Algoritmo da inversa

Das considerações do slide anterior deduz-se o seguinte algoritmo.

- `Input:` Matriz quadrada A
- `Objectivo:` Decidir sobre a invertibilidade de A e calcular A^{-1}

$$[A\,|\,I] \longrightarrow \cdots \longrightarrow [A'\,|\,I'] \xrightarrow{\text{(se } A \text{ invertível)}} \cdots \longrightarrow [I\,|\,A^{-1}]$$

(A' em escada)



Algoritmo da inversa - exercício

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Qual é a solução do sistema linear $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$?

(**Sugestão**: ver o slide 62.)

Resolução do exercício aplicando o algoritmo da inversa

$$[A\,|\,I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [A'\,|\,I'].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e não tem linhas nulas. Logo A é invertível. Aplicando a fase ascendente do método de eliminação de Gauss vem,

$$\left[\,A'\,|\,I'\,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\,I\,|\,A^{-1}\,\right].$$

Podemos confirmar que A^{-1} está bem calculada verificando a relação $AA^{-1} = I$:

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -2 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & o \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \checkmark$$

Note que vetor $(1, 0, 0)$ é a 1ª coluna da matriz identidade, que denotámos por e_1, e portanto pelos considerações do slide 62 a solução de $Ax = e_1$ é a primeira coluna da matriz A^{-1}, isto é, o vetor $(-1, 0, -1)$.

Exercício - 2

Exercício na aula

Aplicando o algoritmo da inversa, decida sobre a invertibilidade de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

e determine a sua inversa (caso exista).

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A \,|\, I]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_1]{L_2 + L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[\, A' \,|\, I' \,\right].$$

A matriz dos coeficientes A' está em escada e possui uma linha nula. Logo A é não invertível, isto é, é singular.

Característica de uma matriz

- A característica de uma matriz A, denotada $\text{car}(A)$, é o número de pivots de qualquer matriz em escada A' obtida a partir de A, por aplicação de operações elementares do método de Gauss[7].

- Uma vez que não pode haver mais que um pivot em cada linha e em cada coluna de uma matriz em escada, a característica de uma matriz $A_{m\times n}$ não pode ser superior ao número de linhas m nem ao número de colunas n de A, isto é,

$$\text{car}(A) \leq \min\{m, n\}.$$

- Pode-se provar ainda a relação,

$$\text{car}(A^T) = \text{car}(A).$$

[7] Veremos no capítulo dos espaços vetorais que a característica de uma matriz pode ser equivalentemente definida usando o conceito de dimensão...

Exemplo

Se, por exemplo,

$$A_{4\times 5} \to^{\text{oper. elementares}} \cdots \to A' = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]_{4\times 5},$$

obtém-se

$$\text{car}(A) \;=\; \text{nº de pivots de } A' \;=\; 3 \;\leq\; \min\{4,5\},$$

e ainda,

$$\text{car}(A^T) \;=\; \text{car}(A) \;=\; 3.$$

Invertibilidade e característica

Do algoritmo da inversa deduz-se imediatamente o seguinte critério para decidir se uma matriz é invertível (justifique!).

Critério de invertibilidade

Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se e só se $\text{car}(A) = n$.

Exercício

Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix}$ é invertível ?

Resolução: Aplicando a fase descendente do método de Gauss tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 1 & 2\alpha & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 2\alpha & 6+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \\ 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix} = A'.$$

Logo pelo critério de invertibilidade, a matriz $A_{3\times 3}$ é invertível se e só se $\text{car}(A) = 3$ se e só se o nº de pivots de A' é 3 se e só se $\alpha \neq 0, 2$.

Propriedades da inversa

Proposição

Sejam A, B matrizes invertíveis da mesma ordem. Então:

1. A^{-1} é invertível e tem-se $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. λA é invertível para todo o $\lambda \neq 0$ e tem-se $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.
3. AB é invertível e tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$, ou seja, a inversa do produto é o produto das inversas, pela ordem inversa([8]).
4. A^k é invertível para todo o $k \in \mathbb{N}$ e tem-se $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. A^T é invertível e tem-se $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(A demonstração das propriedades será feita nas aulas práticas.)

Potências negativas de matrizes invertíveis

Se A é uma matriz **invertível**, define-se

$$A^{-k} = (A^{-1})^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

[8] Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ são invertíveis da mesma ordem, então $A_1 A_2 \cdots A_k$ é também invertível e tem-se $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$.

Aplicação da matriz inversa aos sistemas lineares

- A equação linear $ax = b$ em que $a, b \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, admite a solução única $x = \dfrac{b}{a}$, que se pode escrever na forma $x = a^{-1}b$.
- A noção de inversa de uma matriz permite obter a solução de um sistema do tipo $Ax = b$ com A invertível, de uma forma análoga.

Proposição

Se A é uma matriz invertível de ordem n então o sistema linear $Ax = b$ é PD com solução única $x = A^{-1}b$ qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^n$.

Dem: se A é invertível, existe A^{-1} e podemos escrever, multiplicando à esquerda ambos os membros da equação matricial $Ax = b$ por A^{-1},

$$\begin{aligned} Ax = b &\Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow I_n x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b. \quad \square \end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos a matriz invertível $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ do slide 65.

Como A é invertível, conclui-se da proposição do slide anterior que o sistema linear $Ax = b$ é PD para todo o $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, tendo como única solução,

$$x = A^{-1}b = \left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 2 \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_1 + 2b_3 \\ \frac{1}{2}b_2 \\ -b_1 + b_3 \end{bmatrix},$$

onde usámos o cálculo da matriz A^{-1} efetuado no slide 65.

TPC: Confirme que $(-b_1 + 2b_3, \frac{1}{2}b_2, -b_1 + b_3)$ é solução de $Ax = b$, para todo o $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$.

O espaço vetorial $\mathbb{R}^n$

No slide 9 mencionámos as seguintes 8 propriedades das operações, adição de vetores de $\mathbb{R}^n$ e produto de um vetor de $\mathbb{R}^n$ por um escalar.

Propriedades das operações algébricas com vetores

Sejam x, y, z vetores de $\mathbb{R}^n$, $\vec{0} = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tem-se,

1. $x + y = y + x$ (comutativa)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativa)
3. $x + \vec{0} = x$ (existência de el. neutro)
4. $x + (-x) = \vec{0}$ (existência de el. simétrico)
5. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (distributiva...)
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (distributiva...)
7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ (compatibilidade dos produtos)
8. $1\,x = x$ (el. identidade da multiplicação por escalar)

As propriedades anteriores significam que $\mathbb{R}^n$ munido da adição de vetores e do produto de vetores por escalares é um *espaço vetorial*. Como exemplo distinto de um espaço vetorial temos o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ munido das operações da adição de matrizes e produto de uma matriz por um escalar.

Subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Vamos estudar os subconjuntos não vazios $V \subset \mathbb{R}^n$ para os quais se podem adicionar vetores de V e multiplicar vetores de V por escalares sem sair de V, isto é, de modo a ainda se obterem vetores de V.

Definição de subespaço vetorial

Um subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ diz-se um *subespaço vetorial* de $\mathbb{R}^n$ se

- $V \neq \varnothing$
- V é fechado para a adição, isto é, para todo o $u, v \in V$ tem-se $u + v \in V$
- V é fechado para o produto por escalar, isto é, para todo o $u \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se $\alpha u \in V$

Observação

É imediato verificar que se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ ainda são válidas as propriedades $(1), \ldots, (8)$ relativamente aos vetores de V, isto é, que V munido com as operações, adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares, herda a estrutura de espaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

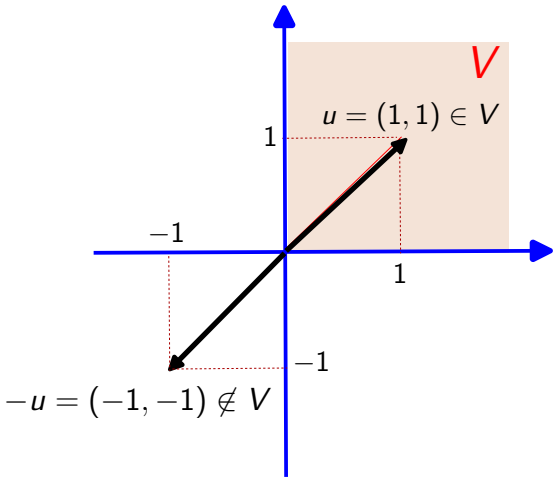
Exemplos

- $V = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (1º quadrante incluindo eixos coordenados): não vazio, fechado para a adição mas não para o produto por escalar $\Rightarrow$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

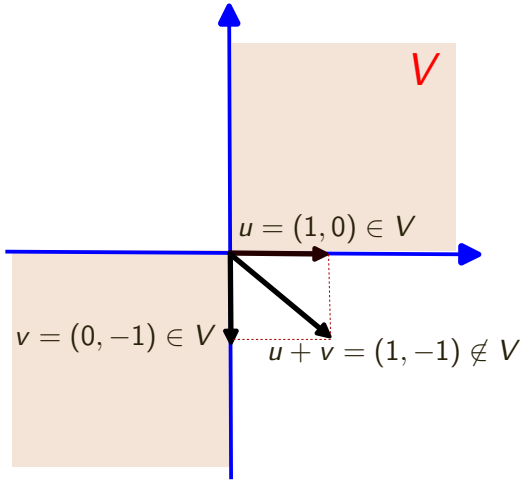
- $V = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ (1º e 3º quadrantes incluindo eixos coordenados): não vazio, fechado para o produto por escalar mas não para a adição $\Rightarrow$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

- $V = \{(x, y) : x = y\}$ (bissectriz dos quadrantes ímpares): não vazio, fechado para a adição e para o produto por escalar $\Rightarrow$ é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

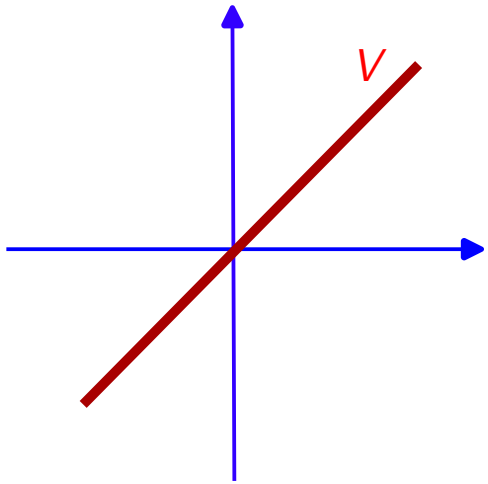
Ilustração do slide anterior



$V = \{(x,y) : x, y \geq 0\} \neq \emptyset$
(1º quadrante incluindo eixos coordenados)
Não é fechado para o produto por escalar
Logo não é subespaço vetorial



$V = \{(x,y) : xy \geq 0\} \neq \emptyset$
(1º e 3º quadrantes
incluindo eixos coordenados)
Não é fechado para a adição
Logo não é subespaço vetorial



$V = \{(x,y) : x = y\} \neq \emptyset$
(Bissectriz dos
quadrantes ímpares)
É fechado para a adição e para o
produto por escalar (como veremos)
Logo é subespaço vetorial

Subespaço mininal e subespaço maximal

As 3 condições da definição de subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ do slide 74 são trivialmente verificadas quando $V = \{\vec{0}\}$ e $V = \mathbb{R}^n$, obtendo-se os seguintes 2 subespaços vetoriais especiais de $\mathbb{R}^n$:

- $\{\vec{0}\}$ subespaço vetorial minimal (ou trivial).
- $\mathbb{R}^n$ subespaço vetorial maximal.

Condição necessária para ser subespaço vetorial

Vamos agora estabelecer uma condição necessária (mas não suficiente) para um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ definir um subespaço vetorial.

Teorema

Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ então $\vec{0} \in V$.

Demonstração: Se V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$, tem-se:

- $V \neq \emptyset$, logo existe um vetor $v \in V$.
- V é fechado para o produto por escalar, logo $\lambda v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- Considerando, em particular, $\lambda = 0$, conclui-se que $0v = \vec{0} \in V$ como se pretendia. $\square$

Exemplo

Se V for a circunferência de raio 1, isto é, $V = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, V não é subespaço vetorial pois não contém a origem $(0^2 + 0^2 \neq 1)$.

Espaço nulo de uma matriz

O seguinte conceito introduz o primeiro dos subespaços vetoriais fundamentais associados a matrizes que vamos considerar.

Definição de espaço nulo de uma matriz

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se *espaço nulo de A* e denota-se por $\mathcal{N}(A)$, ao conjunto de soluções do sistema linear $Ax = \vec{0}$, isto é,

$$\mathcal{N}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = \vec{0}\right\} \subset \mathbb{R}^n.$$

- O espaço nulo de A corresponde ao CS do sistema linear $Ax = \vec{0}$, dito homogéneo, em que o vetor dos termos constantes é o vetor nulo.
- Um sistema homogéneo nunca é impossível uma vez que possui sempre a solução trivial $x = \vec{0}$ (pois $A\,\vec{0} = \vec{0}$). Em particular $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$.

O espaço nulo é subespaço vetorial...

Teorema

Para toda a matriz $A_{m\times n}$, $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Tem-se:

- $\mathcal{N}(A) \neq \emptyset$ como vimos no slide 79.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para a adição: se $u, v \in \mathcal{N}(A)$ então u e v são soluções de $Ax = \vec{0}$, isto é, $Au = Av = \vec{0}$ e portanto $A(u+v) = Au + Av = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, o que significa que $u + v$ é também solução de $Ax = \vec{0}$. Logo $u + v \in \mathcal{N}(A)$.
- $\mathcal{N}(A)$ fechado para o produto por escalar fica como exercício.

Logo é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ pois verifica 3 condições do slide 74. $\square$

Consequências

- Um conjunto definido por um sistema de equações lineares homogéneas com n variáveis é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, pois corresponde ao espaço nulo da matriz dos coeficientes desse sistema.

Por exemplo,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 0\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ pois também pode ser definido como,

$$V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Observação

Se alguma das equações lineares que definem V não for homogénea, então V não é um subespaço vetorial porque que não contém a origem.

Por exemplo, o plano de $\mathbb{R}^3$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1\}$, não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ porque não passa na origem ($(0, 0, 0) \notin V$).

Cálculo do espaço nulo

Para calcularmos o espaço nulo de uma matriz A, $\mathcal{N}(A)$, temos que resolver o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$, isto é, reduzir a matriz ampliada $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$. Note-se que o vetor dos termos constantes pode ser omitido no método de Gauss uma vez que é sempre nulo!

Exercício - 1

Determinar o espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Reduzindo a matriz ampliada $[\,A\,|\,\vec{0}\,]$ obtém-se,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0,\ x_2 = x_3,\ x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(0, x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \{x_3(0,1,1) : x_3 \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- Geometricamente $\mathcal{N}(A)$ define uma reta de $\mathbb{R}^3$ (porque o sistema $Ax = \vec{0}$ possui uma variável livre), que passa na origem (porque o sistema é homogéneo) com vetor diretor $v = (0,1,1)$.

Cálculo do espaço nulo (cont.)

Exercício - 2

Determinar o espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

- Reduzindo a matriz ampliada $[\,A \,|\, \vec{0}\,]$ obtém-se,

$$[\,A \,|\, \vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \end{array}\right] = [\,A' \,|\, \vec{0}\,].$$

  Uma vez que todas as colunas de A' têm pivot o sistema $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto possui apenas uma solução, que tem que ser a solução trivial $x_1 = x_2 = 0$, isto é, $CS = \{(0,0)\}$.

- Logo $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, $\mathcal{N}(A)$ é o subespaço minimal de $\mathbb{R}^2$.

Em geral tem-se o seguinte.

Critério para $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal)

$\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow Ax = \vec{0}$ é determinado $\Leftrightarrow$ todas as colunas de matriz em escada A' obtida a partir de A têm pivot. $\Leftrightarrow$ car(A)=nº colunas de A

Possíveis subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$

Pode-se provar que os subespaços vetoriais são de um dos seguintes tipos.

Tipos de subespaços vetoriais

- *Subespaços vetoriais do plano* $(\mathbb{R}^2)$*:*

  $$\{\vec{0}\}, \quad \textit{retas que passam na origem}, \quad \mathbb{R}^2.$$

- *Subespaços vetoriais do espaço* $(\mathbb{R}^3)$*:*

  $$\{\vec{0}\}, \quad \textit{retas e planos que passam na origem}, \quad \mathbb{R}^3.$$

- *Subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^n$*, com* $n \geq 4$*:*

  $$\{\vec{0}\}, \ \textit{retas, planos, } \ldots \textit{ e hiperplanos que passam na origem}, \ \mathbb{R}^n.$$

  (um hiperplano é um conjunto definido por uma equação linear do tipo $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$*, com os coeficientes* $a_1, \ldots, a_n$*, não todos nulos.)*

Combinação linear de vetores

Definição de combinação linear

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é **combinação linear** (CL) de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$b = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamam-se *coeficientes* da combinação linear.

Por outras palavras, b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ se puder ser obtido como soma de múltiplos desses vetores.

Exemplos de combinações lineares de vetores

- $(2,4,-2) = 2(1,0,0) + 4(0,1,0) - 2(0,0,1) = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3$.
- $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- O vetor nulo $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$ é sempre CL de qualquer conjunto de m vetores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$, pois

$$\vec{0} = 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m,$$

e cada um dos vetores v_i é também sempre CL dos m vetores do conjunto $v_1, \ldots, v_m$:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ v_2 &= 0\, v_1 + 1\, v_2 + \cdots + 0\, v_m, \\ &\vdots \\ v_m &= 0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 1\, v_m. \end{aligned}$$

Como determinar combinações lineares?

Exemplo

Sejam $v_1 = (2,2,1)$, $v_2 = (2,3,1)$ e $b = (2,5,1)$. Queremos determinar escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (caso existam) tais que $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Ora,

$$\begin{aligned} b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 &\Leftrightarrow (2,5,1) = \alpha_1(2,2,1) + \alpha_2(2,3,1) \\ &\Leftrightarrow (2,5,1) = (2\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo (α_1, α_2) é solução, caso exista, do sistema cuja matriz ampliada é

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [\, v_1 \quad v_2 \mid b \,],$$

e podemos determinar os coeficientes α_1, α_2 aplicando o método de Gauss à matriz ampliada anterior.

Como determinar combinações lineares? (cont.)

- Aplicando a fase descendente do método de Gauss a $[\, v_1 \quad v_2 \mid b \,]$, obtém-se

$$[\, v_1 \quad v_2 \mid b \,] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

- Como o sistema anterior é PD, os coeficientes α_1 e α_2 da CL existem e são únicos, isto é, b é CL de v_1 e v_2 de uma única forma.
- Para determinarmos α_1 e α_2 aplicamos a fase ascendente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \dashrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -2 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

- Logo a única forma de obter b como CL de v_1 e v_2 é,

$$b = (2, 5, 1) = -2(2, 2, 1) + 3(2, 3, 1) = -2v_1 + 3v_2.$$

Combinações lineares via sistemas lineares

Tem-se, de modo análogo, o seguinte resultado mais geral.

Teorema

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n, b \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$.
Têm-se as seguintes equivalências:

(i) $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, com $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução do sistema $Ax = b$, isto é, do sistema linear cuja matriz ampliada é $[\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \mid b \,]$.

Tem-se a seguinte consequência imediata do resultado anterior.

Corolário

Um vetor $b \in \mathbb{R}^m$ é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ se e só se o sistema $Ax = b$ for possível, onde $A_{m\times n} = [\, v_1 \;\; v_2 \;\; \cdots \;\; v_n \,]$.

Espaço gerado por um conjunto de vetores

Espaço gerado por um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Chama-se espaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$, denotado $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, ao subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^m$ que são CL de $v_1, \ldots, v_n$, isto é,

$$\begin{aligned} \langle v_1, \ldots, v_n \rangle &= \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \ : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^m \ : \ b \text{ é CL de } v_1, \ldots, v_n\}. \end{aligned}$$

Exemplos

- $\langle \vec{0} \rangle = \{\alpha \vec{0} \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\vec{0}\}$ - subespaço minimal.
- $\langle \vec{v} \rangle = \{\alpha v \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$ com $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ - reta de $\mathbb{R}^n$ que passa na origem com direção v.
- Considerando $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ obtém-se,

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \{\alpha_1(1, 0) + \alpha_2(0, 1) \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2) \ : \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2 - \text{subespaço maximal.} \end{aligned}$$

Espaço das colunas de uma matriz

Definição

Chama-se espaço das colunas de uma matriz $A_{m\times n}$ ao conjunto,

$$\mathcal{C}(A) = \left\{ b \in \mathbb{R}^m : Ax = b \text{ é possível} \right\}.$$

Observação

Denotando $A = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,]$ tem-se pelo corolário do slide 89 que $Ax = b$ é possível se e só se b é CL de $v_1, \ldots, v_n$ e portanto,

$$\boxed{\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.}$$

Por outras palavras, o espaço das colunas de uma matriz A é também o espaço gerado pelos vetores que constituem as colunas de A.

Teorema

Seja $A_{m\times n} = [\, v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n \,]$. Tem-se que $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ é um subepaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Algoritmo para determinar o espaço gerado/espaço das colunas

Algoritmo

`Input:` $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A_{m\times n} = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$.

`Objectivo:` Determinar $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$

Aplica-se a fase descendente do método de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$, com $b = (b_1, \ldots, b_m)$ vetor genérico. Seja $[A'|b']$ obtida a partir de $[A|b]$ com A' em escada. Podem ocorrer 2 casos:

- A' não possui linhas nulas. Neste caso $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$, isto é,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m \quad \text{(subespaço maximal)}.$$

- A' possui linhas nulas, digamos as linhas $k+1, \ldots, m$. Nessa altura,

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A) = \left\{(b_1, \ldots, b_m) : b'_{k+1} = b'_{k+2} = \cdots = b'_m = 0\right\}.$$

Neste caso $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathcal{C}(A)$ fica definido por um sistema linear homogéneo, que designamos por sistema de equações definidoras.

Exemplos

Exermplo 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (1,3),(2,4),(0,1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss a $[A|b]$, com $b = (b_1, b_2)$ genérico obtém-se,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 3 & 4 & 1 & b_2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & b_1 \\ 0 & -2 & 1 & b_2 - 3b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

Como A' não tem linhas nulas (1º caso do algoritmo do slide 92), $Ax = b$ é possível para todo o $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e portanto

$$\mathcal{C}(A) = \langle (1,3),(2,4),(0,1) \rangle = \mathbb{R}^2 \quad \text{(subespaço maximal)}.$$

Exemplos (cont.)

Exemplo 2 (exemplo do slide 87 revisitado)

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2,2,1), (2,3,1) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[A|b]$, começando por trocar a 1ª com a 3ª linhas, obtém-se (verifique),

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|l} 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 3 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cc|l} 1 & 1 & b_1' = b_3 \\ 0 & 1 & b_2' = b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_3' = b_1 - 2b_3 \end{array}\right] = [A'|b'],$$

donde resulta que $Ax = b$ é possível se e só se $b_3' = 0$ isto é, $b_1 - 2b_3 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

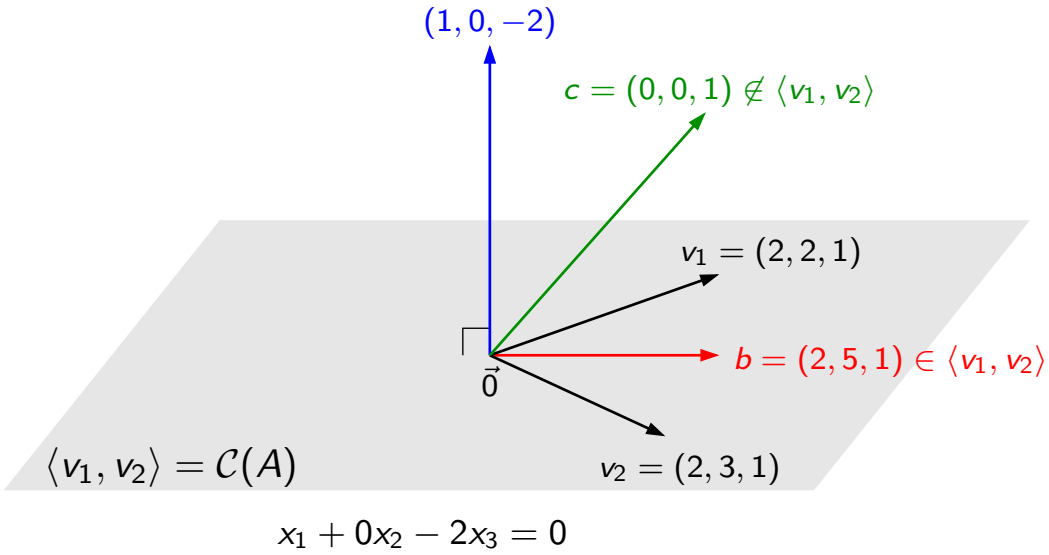
$$\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2 \rangle = \{(b_1, b_2, b_3) \ : \ b_1 - 2b_3 = 0\},$$

que define o plano de $\mathbb{R}^3$ com equação cartesiana $x - 2z = 0$, que passa na origem e tem vetor normal $(1, 0, -2)$.

Deduz-se, em particular, que os vetores de $\mathbb{R}^3$ que são CL de v_1 e v_2, são os vetores cuja abcissa x é o dobro da cota z (cf. com o slide 88).

Interpretação geométrica

Os vetores que são CL de v_1 e v_2 são os vetores do espaço gerado $\langle v_1, v_2 \rangle$, isto é, os vetores $b = (b_1, b_2, b_3)$ que satisfazem a equação $b_1 - 2b_3 = 0$, isto é, que pertencem ao plano de equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$.



Por exemplo, o vetor normal ao plano $(1, 0, -2)$ e o vetor $c = (0, 0, 1)$ não são CL de v_1 e v_2 uma vez que não satisfazem a equação cartesiana $x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$. Já o vetor $b = (2, 5, 1)$ tem que verificar a equação uma vez que b é CL de v_1 e v_2 ($b = -2v_1 + 3v_2$ como vimos no slide 87).

Exemplos (cont.)

Exemplo 3

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Determinar $\mathcal{C}(A) = \langle (2,2,3), (4,4,6) \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $[\,A|b\,]$ vem,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & b_1 \\ 2 & 4 & b_2 \\ 3 & 6 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - \frac{3}{2}L_1]{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & b_1' = b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 - \frac{3}{2}b_1 \end{array}\right] = [A'|b'].$$

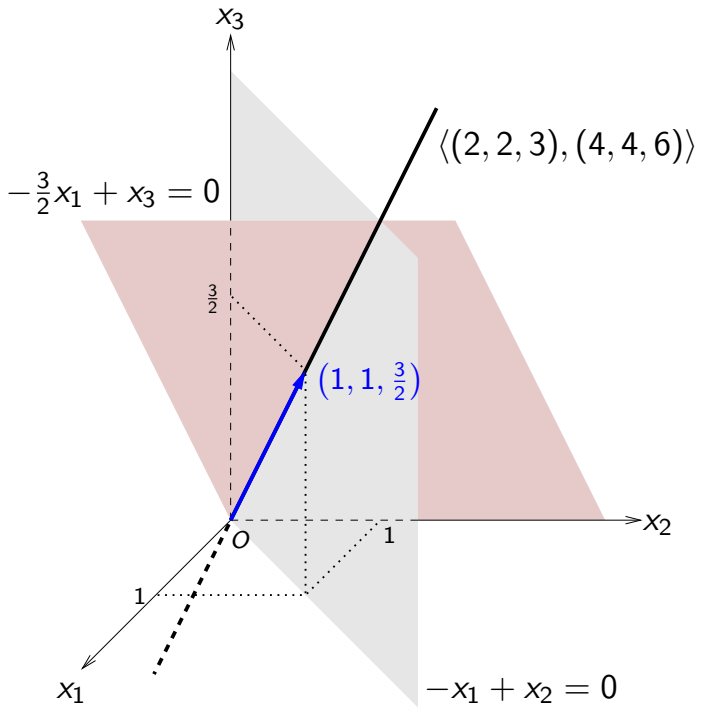
O sistema $Ax = b$ é possível se e só se $b_2 - b_1 = 0$ e $b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0$ (2º caso do algoritmo do slide 92). Logo,

$$\begin{aligned} V = \mathcal{C}(A) &= \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \,:\, b_2 - b_1 = 0,\ b_3 - \frac{3}{2}b_1 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \left(b_1, b_1, \frac{3}{2}b_1 \right) \,:\, b_1 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b_1 \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \,:\, b_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right\rangle . \end{aligned}$$

Interpretação geométrica

Geometricamente, $V = \langle (2,2,3), (4,4,6) \rangle$ corresponde à reta de $\mathbb{R}^3$ que passa na origem com vetor diretor $\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)$, obtida como interseção dos planos $-x_1 + x_2 = 0$ e $-\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0$:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$



Observações importantes sobre $\mathcal{N}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$

Casos especiais

Seja A uma matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A por aplicação do método de Gauss. Tem-se:

- $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal) se e só se $Ax = \vec{0}$ é determinado se e só se todas as colunas de A' têm pivot se e só se $\text{car}(A) = n$ (número de colunas de A).
- $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^m$ (subespaço maximal) se e só se $Ax = b$ é possível para todo o $b \in \mathbb{R}^m$ se e só se não há linhas nulas em A' se e só se $\text{car}(A) = m$ (número de linhas de A).

Condições para um vetor pertencer a $\mathcal{N}(A)$ e a $\mathcal{C}(A)$

Ainda nas condições anteriores tem-se:

- Dado $v \in \mathbb{R}^n$, tem-se $v \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow Av = \vec{0}$.
- Dado $b \in \mathbb{R}^m$, tem-se $b \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow Ax = b$ possível.

Independência linear de um conjunto de vetores

Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$. Tem-se sempre a CL nula de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ em que os coeficientes são todos nulos, dita CL nula trivial,

$$0\, v_1 + 0\, v_2 + \cdots + 0\, v_n = \vec{0}.$$

Definição de independência linear

O conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ diz-se linearmente independente (l.i.) se para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0},$$

se tem

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Por outras palavras, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é l.i. se a CL nula trivial for a única CL nula de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Se o conjunto não for l.i. diz-se linearmente dependente (l.d.).

Independência linear - exemplos

- Seja $v = (1, 2)$. Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\alpha\, v = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(1, 2) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha, 2\,\alpha) = (0, 0) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 0.$$

  Logo $\{v\}$ é l.i.

- Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$. Para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tem-se,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\,\alpha_2 = 0 \\ 2\,\alpha_1 + 4\,\alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

  Logo $\{v_1, v_2\}$ é l.i.

- Sejam $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$. Tem-se $v_2 = 2\, v_1$ e portanto

$$2\, v_1 - v_2 = \vec{0}.$$

  Como existe uma CL nula de v_1 e v_2 com os coeficientes não todos nulos ($\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = -1$), conclui-se que $\{v_1, v_2\}$ é l.d.

- Sejam $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (2, 5, 1)$. Vimos no slide 87 que $v_3 = -2\, v_1 + 3\, v_2$ e portanto temos a CL nula, não trivial,

$$-2\, v_1 + 3\, v_2 - v_3 = \vec{0}.$$

  Logo $\{v_1, v_2, v_3\}$ é l.d.

Observação

Aplicando o resultado do slide 89 com $b = \vec{0}$, obtém-se o seguinte.

Corolário

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ e $A = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & \cdots & v_n \end{array}\right]$. Tem-se:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0} & \Leftrightarrow & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ solução de } \left[\begin{array}{ccc|c} v_1 & \cdots & v_n & \vec{0} \end{array}\right] \\ & \Leftrightarrow & (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}(A). \end{array}$$

Voltando aos exemplos do slide anterior tem-se:

- No caso l.i. em que $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (3, 4)$ obtém-se $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right]$, uma vez que $\left[\begin{array}{cc|c} v_1 & v_2 & \vec{0} \end{array}\right]$ é determinado.
- No caso l.d. em que $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (2, 4)$, tem-se $2v_1 - v_2 = \vec{0}$ e portanto $(2, -1) \in \mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{cc} v_1 & v_2 \end{array}\right]$.
- No caso l.d.em que $v_1 = (2, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, 1)$ e $v_3 = (2, 5, 1)$, tem-se $-2v_1 + 3v_2 - v_3 = \vec{0}$ e portanto $(-2, 3, -1) \in \mathcal{N}(A) \neq \{\vec{0}\}$, onde $A = \left[\begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array}\right]$.

Critério de independência linear via Gauss

Vamos dar uma caracterização de independência linear usando o método de Gauss :) que decorre imediatamente das observações do slide anterior.

Teorema

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, $A_{m\times n} = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ e A' matriz em escada obtida a partir de A aplicando operações elementares.

As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.
- $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$, isto é, o sistema homogéneo $Ax = \vec{0}$ é determinado.
- $\text{car}(A) = n$, isto é, todas as colunas de A' têm pivot.

Exercício na aula

Considere $v_1 = (1, \alpha, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1)$ e $v_3 = (\alpha, 3, 3)$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Decida sobre a independência linear de $\{v_1, v_2, v_3\}$ em função de α.

(In)dependência linear via sistemas lineares (cont.)

Resolução do exercício do slide anterior

Consideremos a matriz $A = [v_1 \ v_2 \ v_3]$. Aplicando a fase descendente do método de eliminação de Gauss à matriz A vem,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 - L_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & -1 & 3-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3-\alpha^2 \\ 0 & 0 & 6-\alpha-\alpha^2 \end{bmatrix} = A'.$$

Tem-se $\{v_1, v_2, v_3\}$ l.i. $\Leftrightarrow$ todas as colunas de A' têm pivot $\Leftrightarrow$ $6 - \alpha - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)6}}{2(-1)}$ (F.R.) $\Leftrightarrow \alpha \neq -3, 2$.

Cardinalidade máxima de um conjunto l.i.

Como a característica de uma matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$, isto é, o número de pivots de A', não pode ser superior ao número de linhas de A e pelo teorema do slide 102 tem-se a relação,

$$\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ l.i.} \quad \Leftrightarrow \quad \text{car}(A) = n,$$

deduz-se que se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for l.i. então $n = \text{car}(A) \leq m$.
Tem-se então o seguinte resultado.

Teorema

Um conjunto linearmente independente de vetores de $\mathbb{R}^m$ possui no máximo m vetores.

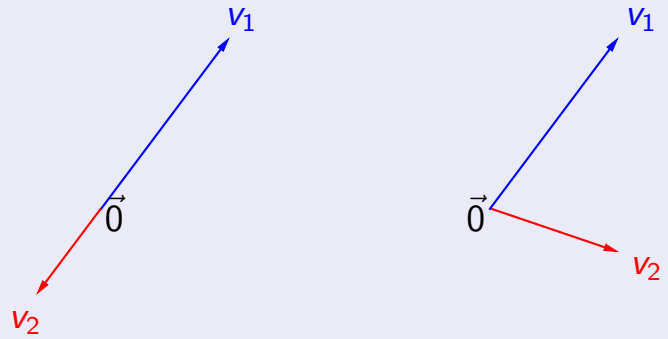
- Por exemplo, considerando $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, -1, 1)$, $v_3 = (1, 3, 1, 4)$, $v_4 = (0, 0, 1, 1)$ e $v_5 = (0, 0, 0, 1)$, conclui-se imediatamente que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ é linearmente dependente por ser constituído por $5 > 4$ vetores de $\mathbb{R}^4$.

Caracterização mais intuitiva de **dependência linear**

Como consequência do teorema do slide 102 prova-se facilmente o seguinte resultado, onde $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ (ver também o slide 101).

Teorema

- $\{v_1\}$ é l.d. se e só se $v_1 = \vec{0}$.
- $\{v_1, v_2\}$ é l.d. se e só se um dos vetores for múltiplo do outro vetor, isto é, os vetores forem colineares.



$\{v_1, v_2\}$ l.d. $\{v_1, v_2\}$ l.i.

- Mais geralmente, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ com $n \geq 2$, é l.d. se e só se um dos vetores v_i for CL dos restantes $n-1$ vetores do conjunto

Conceitos de base e dimensão de um subespaço vetorial

Intuitivamente uma base de um subespaço vetorial V é um subconjunto finito de vetores de V que (i) não contém vetores "redundantes" no sentido em que nenhum dos vetores da base se pode obter como CL dos restantes vetores da base, mas (ii) contém vetores "suficientes" de modo a que todo o vetor de V se possa escrever como CL dos vetores da base([9]).

Definição de base

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k$ vetores de V.
Diz-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base** de V se verificar as condições:

(i) $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

(ii) $v_1, \ldots, v_k$ geram V, isto é, $V = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Teorema-definição

Todas as bases de um mesmo subespaço vetorial V possuem o mesmo número de vetores a que chamamos dimensão de V e denotamos por $\dim V$.

[9] Note-se que as CL de vetores de V ainda são vetores de V porque V é um subespaço vetorial, logo fechado para o produto por escalares e para a adição.

Exemplos

- O subespaço vetorial $V = \langle (1,1,1) \rangle = \{\alpha(1,1,1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ define a reta que passa na origem com direção $(1,1,1)$ e admite a base $\{v\}$, com $v = (1,1,1)$. De facto:
  (i) $\{v\}$ é linearmente independente pois $v \neq \vec{0}$.
  (ii) v gera V pois por definição $V = \langle v \rangle$.

  Em particular, dim V = número de vetores da base = 1.

- O subespaço maximal $\mathbb{R}^3$ admite a dita base canónica, $\{e_1, e_2, e_3\}$, onde

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0), \quad \text{e} \quad e_3 = (0,0,1),$$

  são as colunas da matriz identidade de ordem 3. De facto:
  (i) $\{e_1, e_2, e_3\}$ é linearmente independente, pois

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0).$$

  (ii) e_1, e_2, e_3 geram $\mathbb{R}^3$. De facto:

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2, e_3 \rangle &= \{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \ : \ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(0,1,0) + \alpha_3(0,0,1) \ : \ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \ : \ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

  Em particular, dim $\mathbb{R}^3$ = número de vetores da base = 3.

Como construir bases para subespaços vetoriais?

Um subespaço vetorial V de $\mathbb{R}^n$ pode ser definido das seguintes 4 formas:

- $V = \{\vec{0}\}$ (subespaço minimal).
- $V = \mathbb{R}^n$ (subespaço maximal).
- *Gerado por um conjunto de vetores* / *espaço das colunas de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \langle (1,1,0,1), (1,2,-1,0), (1,0,1,2), (2,1,1,3) \rangle$,

    ou seja, $V = \mathcal{C}(A)$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- *Como CS de um sistema de equações lineares homogéneas* / *espaço nulo de uma matriz*. Por exemplo,
  - $V = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0, 2x_1 + 6x_2 = 0\}$,

    ou seja, $V = \mathcal{N}(A)$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.

Vamos ver a seguir como obter bases em cada um destes 4 casos.

Base e dimensão dos subespaços minimal e maximal

Base e dimensão do subespaço mininal

Convenciona-se que $\{\}$ é a (única) base do subespaço mininal $\{\vec{0}\}$. Uma vez que esta base não possui vetores tem-se,

$$\boxed{\dim\{\vec{0}\} = 0}$$

A base canónica de $\mathbb{R}^3$ do slide 107 generaliza-se para $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário.

Base canónica e dimensão do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$

O conjunto $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ formado pelas n colunas da matriz identidade I_n,

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1),$$

constitui uma base de $\mathbb{R}^n$ que se designa por base canónica (b.c.), tendo-se

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$$

Em particular, qualquer outra base para $\mathbb{R}^n$ terá que possuir também n vetores.

Caracterização das bases de um subespaço maximal

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ e $A = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]$, que é uma matriz quadrada de ordem n. Aplicando os casos especiais do slide 98 obtêm-se as equivalências:

$$\begin{aligned} \{v_1, \ldots, v_n\} \text{ l. i.} &\Leftrightarrow \operatorname{car}(A) = n = m \\ &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle. \end{aligned}$$

Logo por definição de base provámos o seguinte resultado.

Teorema (Critério para definir base do subespaço maximal $\mathbb{R}^n$)

Sejam $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base de $\mathbb{R}^n$.
- $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente.
- $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

Bases do subespaço maximal

Conjugando o teorema do slide anterior com o teorema do slide 104 obtém-se a seguinte resultado.

Corolário

As bases de $\mathbb{R}^n$ são os conjuntos linearmente independentes com n vetores, isto é, os conjuntos lin. indep. de cardinalidade máxima([10]).

Exemplo na aula

Quais dos seguintes conjuntos é lin. indep. / gera $\mathbb{R}^3$ / base de $\mathbb{R}^3$?

1. $\{(1,0,0),(2,5,0)\}$. sim / não / não
2. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,0)\}$. não / não / não
3. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9)\}$. sim / sim / sim
4. $\{(1,0,0),(2,5,0),(3,5,9),(x,y,z)\}$. não / sim / não

[10] E são também os conjuntos de geradores de $\mathbb{R}^n$ de cardinalidade mínima.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - exemplo

Sejam $v_1 = (1, 1, -1)$, $v_2 = (0, 2, -1)$, $v_3 = (2, 0, -1)$, $v_4 = (4, 2, -3)$ e $A = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$. Vamos determinar uma base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

Aplicando a fase descendente do método de Gauss à matriz $\left[\, A \,|\, b \,\right]$, com $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ vetor genérico, obtém-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & b_2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & b_3 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1 \end{array}\right]$$

Uma base para $\mathcal{C}(A)$ (contida no conjunto original de geradores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$) é dada pelo subconjunto $\{v_1, v_2\}$ das colunas de A (a vermelho) que correspondem às colunas com *pivot* na matriz em escada A'. De facto:

- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente porque os seus elementos estão associados às colunas com *pivot* na matriz em escada A'.
- v_1 e v_2 geram $\mathcal{C}(A)$ porque os subespaços $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathcal{C}(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix})$ e $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ coincidem, uma vez que são ambos definidos pela mesma equação $b_3 - \frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}b_1 = 0$([11]).

Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = $ nº de pivots de $A' = \text{car}(A) = 2$.

[11] A sequência de operações elementares no método de Gauss e as linhas nulas em A' apenas dependem das colunas de A associadas às colunas com *pivot* em A'.

Base para o espaço das colunas/espaço gerado - algoritmo

Usando o mesmo tipo de argumentos do slide 112 deduz-se o algoritmo abaixo para obter bases do espaço gerado/espaço das colunas, contidas no conjunto inicial de geradores (não é preciso ampliar com o vetor b).

Algoritmo

`Input:` $A = [\, v_1 \quad \cdots \quad v_n \,]$ com $v_1 \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz A:
$$A \to \cdots \to A' \text{ com } A' \text{ escada.}$$
- O subconjunto das colunas de A que correspondem às colunas com pivot em A' constitui uma base de $\mathcal{C}(A) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, contida no conjunto inicial de geradores $v_1, \ldots, v_n$.

Em particular, tem-se

$$\dim \langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de pivots em } A' = \text{car(A)}.$$

Base para o espaço nulo/CS de um sistema homogéneo

Algoritmo

`Input:` Matriz A do tipo $m \times n$.

`Objectivo:` Base para $\mathcal{N}(A)$.

- Aplicar a fase descendente do método de Gauss à matriz $[\,A \,|\, \vec{0}\,]$.

  Seja k o número de variáveis livres do sistema, isto é, o número de colunas sem *pivot* em A'.

- Se $k = 0$, isto é, se não há variáveis livres então $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$ e portanto $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

- Se $k > 0$, aplicar a fase ascendente do método de Gauss a $[\,A' \,|\, \vec{0}\,]$ e associar a cada variável livre a solução particular de $Ax = \vec{0}$ em que essa variável livre toma o valor 1 (ou qualquer valor não nulo) e as restantes variáveis livres o valor zero.

  O conjunto destas k soluções de $Ax = \vec{0}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$.

Em particular, tem-se

$$\boxed{\dim \mathcal{N}(A) = \text{nº de variáveis livres} = n - \text{car}(A)}$$

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercícios

Exercício 1

Determinar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz do slide 112,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

TPC

Determinar uma base do hiperplano de $\mathbb{R}^4$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = 0\}.$$

Ideia: aplicar o algoritmo do slide anterior a $V = \mathcal{N}(A)$ com $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Resolução do exercício 1 do slide anterior

Aplicando a fase descendente à matriz $[\,A \mid \vec{0}\,]$ obtém-se (verifique),

$$[\,A|\vec{0}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [\,A'|\vec{0}\,]$$

Logo o sistema $Ax = \vec{0}$ admite $k = 2 > 0$ variáveis livres (x_3 e x_4).

Aplicando a fase ascendente do método de Gauss à matriz $[\,A' \mid \vec{0}\,]$ vem

$$[\,A' \mid \vec{0}\,] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 + 4x_4 & = & 0 \\ x_2 - x_3 - x_4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Logo $\mathcal{N}(A) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4,\ x_2 = x_3 + x_4,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{R}\}$.

- Tomando $x_3 = 1$ e $x_4 = 0$ tem-se $x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4 = -2$ e $x_2 = x_3 + x_4 = 1$, obtendo-se a solução de $Ax = \vec{0}$, $\boxed{w_1 = (-2, 1, 1, 0)}$.
- Analogamente, tomando $x_3 = 0$ e $x_4 = 1$ tem-se $x_1 = -2\,x_3 - 4\,x_4 = -4$ e $x_2 = x_3 + x_4 = 1$, obtendo-se a solução de $Ax = \vec{0}$, $\boxed{w_2 = (-4, 1, 0, 1)}$.

Pelo algoritmo do slide 114, $\{w_1, w_2\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ tendo-se ainda $\dim \mathcal{N}(A) = \text{nº de variáveis livres} = 2$.

Observações sobre a resolução do exercício 1

Vejamos que a base $\{w_1, w_2\}$ de $\mathcal{N}(A)$ que foi construída usando o algoritmo do slide 114 verifica as duas condições da definição de base de um subespaço vetorial:

- $\{w_1, w_2\}$ é linearmente independente. De facto, considerando uma CL nula arbitrária $\alpha_1\, w_1 + \alpha_2\, w_2 = \vec{0}$, tem-se trivialmente

$$\alpha_1\, w_1 + \alpha_2\, w_2 = (\cdots, \cdots, \alpha_1, \alpha_2) = (0, 0, 0, 0),$$

  obtendo-se $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.
- w_1 e w_2 geram $\mathcal{N}(A)$. De facto, qualquer solução particular w de $Ax = 0$, obtida tomando $x_3 = a$ e $x_4 = b$,

$$w = (2\,a - 4\,b, a + b, a, b),$$

  corresponde à CL $a\, w_1 + b\, w_2 \in \langle w_1, w_2 \rangle$ (verifique).

Base para o espaço nulo de uma matriz - exercícios (cont.)

Exercício 2

Indicar uma base e a dimensão do espaço nulo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolução: aplicando a fase descendente à matriz $[A|\vec{0}]$ obtém-se,

$$[A|\vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] = [A'|\vec{0}].$$

Neste caso não há variáveis livres. Logo $Ax = \vec{0}$ é determinado e portanto $\mathcal{N}(A) = \{\vec{0}\}$. Logo $\{\}$ é a base de $\mathcal{N}(A)$ e $\dim \mathcal{N}(A) = 0$.

Note-se que neste caso $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$, uma vez que não há linhas nulas na matriz em escada A'. Em particular, $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Relação entre as dimensões de $\mathcal{N}(A)$ e de $\mathcal{C}(A)$

- Seja A matriz do tipo $m \times n$ e A' matriz em escada obtida a partir de A. Pelos algoritmos dos slides 114 e 113 tem-se:
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - \text{car}(A)$ (nº de colunas sem pivot em A').
  - $\dim \mathcal{C}(A) = \text{car}(A)$ (nº de colunas com pivot em A').
- Daqui resulta imediatamente a seguinte resultado que estabelece uma relação importante entre as dimensões dos dois subespaços fundamentais associados à matriz A.

Teorema

Se A é uma matriz do tipo $m \times n$ tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = \text{número de colunas de } A = n.$$

No caso da matriz A do exercício 1 dos slides 112 e 116, tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = 2 + 2 = 4 = \text{nº de colunas de } A.$$

No caso da matriz A do exercício 2 do slide 118, tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{C}(A) = 0 + 3 = 3 = \text{nº de colunas de } A.$$

Subespaço vetorial e dimensão

- O conhecimento da dimensão de um subespaço vetorial permite conhecer o tipo de conjunto que esse subespaço vetorial define.
- Para os subespaços vetoriais do plano ($\mathbb{R}^2$) e do espaço ($\mathbb{R}^3$), tem-se o seguinte.

	dimensão do subespaço	tipo de subespaço vetorial
$\mathbb{R}^2$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^3$	0	$\{\vec{0}\}$
	1	reta que passa na origem
	2	plano que passa na origem
	3	$\mathbb{R}^3$

Têm-se ainda as seguintes caracterizações dos subespaços minimal e maximal de $\mathbb{R}^n$ com n arbitrário, em função das suas dimensões:

- $V = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim V = 0$.
- $V = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \dim V = n$.

Critério para definir base de um subespaço vetorial

- Vimos anteriormente que as bases de $\mathbb{R}^m$ (cuja dimensão é m) são os conjuntos linearmente independententes formados por m vetores de $\mathbb{R}^m$ (conjuntos l.i. de vetores de $\mathbb{R}^m$ de cardinalidade **máxima**)
- Temos uma caracterização análoga para qualquer subespaço vetorial V cuja dimensão se conhece!

Teorema

As bases de um subespaço vetorial V de dimensão $k > 0$ são os conjuntos linearmente independentes formados por k vetores de V([12]).

Nos exercícios podemos aplicar o teorema anterior com a seguinte formulação.

Teorema (Critério para definir base de V)

Sejam V subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ e $v_1, \ldots, v_k$, k vetores de $\mathbb{R}^m$. Tem-se que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma **base de** V se e só se verificar as seguintes 3 condições:

- $k = \dim V$.
- $v_1, \ldots, v_k \in V$.
- $\{v_1, \ldots, v_k\}$ é linearmente independente.

[12] Conjuntos l.i. de vetores de V de cardinalidade **máxima**.

Critério para definir base de um subespaço vetorial - exercício

Exercício

Considere $v_1 = (-2, 1, 0, 1)$, $v_2 = (-1, 0, -1, 1)$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 4}.$$

Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

Pelo critério do slide 121 basta verificar as seguintes condições:

- $\dim \mathcal{N}(A) = 2$ (nº de vetores do conjunto). De facto, a matriz em escada A' obtida a partir de A tem 2 colunas sem pivot - confirme.
- $v_1, v_2 \in \mathcal{N}(A)$, pois $Av_1 = \vec{0}$ e $Av_2 = \vec{0}$ - confirme (ver o slide 98).
- $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente, pois v_1 e v_2 são não colineares.

Logo $\{v_1, v_2\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.