Capítulo 3

Ortogonalidade e Projeção Ortogonal

Norma e distância

Exercícios 29.

1. Calcule as normas e indique os versores dos seguintes vectores.
   (a) $(1,-1,2)$
   (b) $(-1,0,\pi,0)$
   (c) $(5,0,1,0,1,3)$
2. Calcule as distâncias entre os seguintes pares de vectores.
   (a) $(1,-1,2)$ e $(0,-1,0)$.
   (b) $(-1,0,2,0)$ e $(1,0,0,1)$.
   (c) $(5,0,1,0,1,3)$ e $(-1,2,0,1,1,0)$.

Exercício 30. Determine os vetores de norma $\sqrt{21}$ que são solução do sistema linear $Ax=b$ com $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ortogonalidade e complemento ortogonal

Exercício 31. Considere $v_1=(1,0,1)$ e $v_2=(1,1,-1)$.

1. Determine o conjunto dos vectores de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonais a v_1 e v_2.
2. Indique um vetor unitário de $\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonal a v_1 e v_2.

Exercícios 32.

1. Justifique que $(2,1,1,-1)$ é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores,

$$(1,0,0,2),\ (-1,0,2,0),\ (-1,2,0,0),\ (1,1,1,4).$$

2. Verifique que $(4,2,-1)$ é ortogonal ao espaço das colunas da matriz

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercícios 33.

1. Determine os complementos ortogonais do espaço das colunas de cada uma das seguintes matrizes (no caso das alíneas a), b) e c) interprete ainda geometricamente o resultado obtido).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os complementos ortogonais dos subespaços gerados pelos conjuntos de vetores $\{(1,2,2,1),(1,0,2,0)\}$ e $\{(1,1,2,-1)\}$.

3. Calcule a dimensão e indique uma base do complemento ortogonal de cada um dos seguintes subespaços gerados.

   (a) $\langle (1,1) \rangle$.

   (b) $\langle (1,1,3),(1,1,2),(0,0,1) \rangle$.

   (c) $\langle (1,1,0,0),(0,2,4,5) \rangle$.

   (d) $\langle (2,2,1,0),(2,4,0,1),(4,-2,1,-1),(8,4,2,0) \rangle$.

4. Para cada subespaço da alínea anterior indique uma base de $\mathbb{R}^n$, com n conveniente, que seja constituída por vetores desse subespaço e do seu complemento ortogonal.

PROJEÇÃO ORTOGONAL

Exercício 34. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Justifique por definição que $\text{proj}_{\mathscr{C}(A)}(b) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exercícios 35.

1. Determine $\text{proj}_{\mathbb{R}^3}(a,b,c)$ e $\text{proj}_{\{\vec{0}\}}(a,b,c)$ para todo o $a,b,c \in \mathbb{R}$.
2. Considere o vetor $b = (1,1,2)$ e o subespaço vetorial $V = \langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle$. Justifique que $b \in V$ e indique as projeções ortogonais de b sobre V e $V^\perp$.

Exercícios 36.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(2,3)$ sobre o vetor $(3,1)$.
2. Determine as projeção ortogonais do vetor $(6,5,4)$ sobre a reta $<(1,-1,3)>$ e sobre o seu complemento ortogonal.

Exercício 37. Considere o vetor $b = (4,-1,1)$ e os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$,

$$U = \{(x,y,z) : x+y+z = 0\} \quad \text{e} \quad V = <(1,0,1),(0,1,1)> .$$

1. Determine as projeções ortogonais de b sobre $U^\perp$, U, $V^\perp$ e V.
2. Calcule as distâncias de b a U e a V.
3. Identifique o vetor de V a menor distância do vetor b.

Exercícios 38.

1. Determine a projeção ortogonal do vetor $(0,2,5,-1)$ sobre o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $(1,1,0,2)$ e $(-1,0,0,1)$.
2. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$,

$$U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0,\ x_2 - x_3 = 0\}$$

e o vetor $v = (2,1,0,1)$. Determine as projeções ortogonais de v sobre U e sobre complemento ortogonal de U.

Exercício 39. Sejam $v_1 = (1,0,1,0)$, $v_2 = (1,1,1,1)$, $v_3 = (1,-1,1,-1)$, $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ e $b = (1,2,3,4)$.

1. Calcule a projeção ortogonal de b sobre $\mathscr{C}(A)$ usando o método das equações normais.
2. Indique uma solução dos mínimos quadrados do sistema $Ax = b$. Será que essa solução corresponde a uma solução de $Ax = b$ no sentido usual?

MATRIZ DE PROJEÇÃO

Exercícios 40.

1. Considere o vetor $w=(1,-2,2,2)$ e o subespaço $V=<\{(1,2,0,0),(1,0,1,1)\}>$.
   (a) Determine a matriz de projeção P sobre o subespaço V.
   (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção de w sobre V.
2. Determine as matrizes de projeção ortogonal sobre o plano V de equação $x+2y+3z=0$ e sobre $V^{\perp}$.
3. Sejam A uma matriz do tipo $m\times n$, com característica n e $P=A(A^{\top}A)^{-1}A^{\top}$ a matriz de projeção sobre $\mathscr{C}(A)$. Prove os seguintes resultados.
   (a) $P^{\top}=P$ (P é simétrica).
   (b) $P^2=P$ (P é idempotente).
4. Justifique que $P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ é a matriz de projeção sobre o subespaço vetorial $W=\{(x,y,z,t):x=y,\,z=t\}$.

BASE ORTOGONAL E MÉTODO DE GRAM-SCHIMDT

Exercícios 41.

1. Considere $u=(1,-1,0,1)$, $v=(0,1,0,1)$, $V=\langle u,v\rangle$ e $b=(2,-1,0,1)$.
   (a) Justifique que $\{u,v\}$ é uma base ortogonal do subespaço V.
   (b) Utilizando a alínea anterior determine a projeção ortogonal de b sobre V.
2. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $a=(1,-1,1)$, $b=(-1,1,2)$ e $c=(1,1,0)$.
   (a) Mostre que $\{a,b,c\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Utilizando projeções ortogonais escreva $(0,2,4)$ como combinação linear de a, b e c.

Exercícios 42.

1. (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,0,1)$.
   (b) Transforme a base obtida na alínea anterior numa base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$.
   (a) Utilizando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt determine uma base ortogonal de V.
   (b) Utilizando a alínea anterior calcule a projeção ortogonal de $(2,1,0,1)$ sobre V.

3. Considere $W = \langle (1,1,1,-1), (0,1,2,-1) \rangle$ e $b = (4,-1,0,3)$.
   (a) Determine uma base e a dimensão de $W^\perp$.
   (b) Calcule $\text{proj}_{W^\perp}(b)$.
   (c) Calcule as distâncias de b a W e $W^\perp$.
   (d) Indique uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha uma base de W.

4. Determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclua uma base de cada um dos seguintes subespaços vetoriais
   (a) $\langle (1,0,1,0), (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle$
   (b) $\{(x,y,z,w) : x - y - z + w = 0,\ x + z = 0\}$

EXERCÍCIOS VARIADOS

Exercícios 43.

1. Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Indique uma base e a dimensão de $\mathscr{C}(A)$.
   (b) Descreva, analitica e geometricamente, $\mathscr{C}(A)$.
   (c) Qual a dimensão de $\mathscr{N}(A)$?
   (d) Calcule a projeção de b sobre $\mathscr{C}(A)$.

2. Considere $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$
   (a) Indique uma base e a dimensão de V.
   (b) Determine o conjunto de todos os vetores ortogonais a V.
   (c) Calcule a matriz de projeção sobre V.

3. Considere uma matriz $A_{3\times 4}$ tal que $\{(2,3,1,0)\}$ é uma base para $\mathscr{N}(A)$.
   (a) Qual a característica de A?
   (b) Indique as soluções de $Ax = 0$.
   (c) Escreva a matriz de projeção sobre $\mathscr{N}(A)$.

(d) Calcule a distância de $b = (0,2,1,0)$ a $\mathcal{N}(A)$.

4. Determine uma base ortogonal para cada um dos subespaços vetoriais

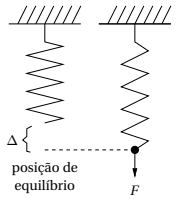
   (a) $\langle (1,1,1),(1,0,-1),(0,3,1)\rangle$

   (b) $\langle (1,0,1,0),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\rangle$

   (c) $\{(x,y,z) : x+y=0,\ y+z=0\}$

   (d) $\{(x,y,z,w) : x-y-z+w=0,\ x+z=0\}$

5. Segundo a *lei de Hooke*, o deslocamento x de uma mola relativamente à sua posição de equilíbrio, é proporcional à força aplicada na mola, isto é, verifica uma relação do tipo $F = k\,x$ em que k é uma constante positiva designada por *constante elástica da mola* (esta lei é uma aproximação apenas válida para pequenas deformações da mola).



   Foram efectuados diversos deslocamentos numa mola e registadas as forças que foram necessárias para produzir esses deslocamentos, assinaladas no seguinte quadro.

x_i (m)	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35
F_i (N)	2.1	3.9	5.7	8.2	10.5	11.7

   Pretende-se estimar o valor da constante elástica da mola k que minimiza o erro E no sentido dos mínimos quadrados, isto é, que minimiza

$$E^2 = (F_1 - k\,x_1)^2 + \cdots + (F_6 - k\,x_6)^2.$$

   Interprete geometricamente o resultado obtido.